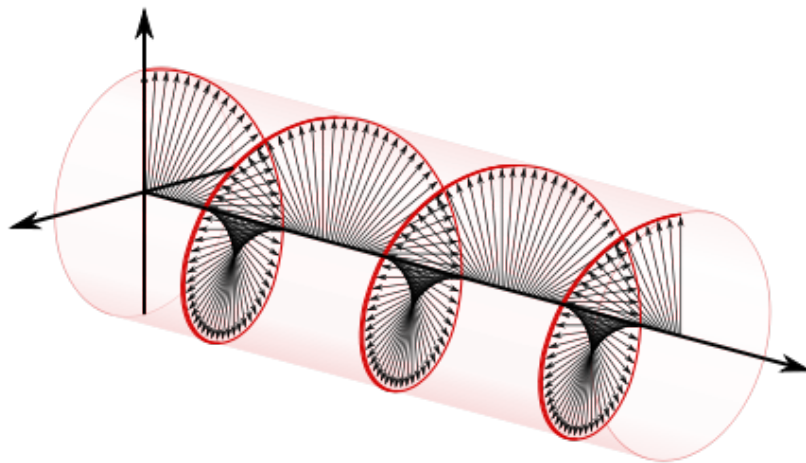




UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Solucionario. Guía Di Bartolo

Física IV (FS-2212)



Preparado, resuelto y tipeado en \LaTeX por:

Erasmó A. Iñiguez B.
Ing. Mecánica. 14'

Primera revisión: Enero 2017

Introducción

Mi motivación principal en la elaboración de este texto, está en mi gusto por la física, y en particular, Física IV, la cual es una materia bastante extensa y compleja, a la cual le dediqué numerosas horas de estudio, y pretendo con esta guía plasmar las soluciones detalladas hechas por mi persona de los problemas de la guía con que se acostumbra estudiar esta materia, como lo es la guía de Di Bartolo.

Este solucionario no pretende ser un libro texto, sino pretende dar apoyo al estudiante para el estudio de Física IV, en donde se presenta la aplicación de la teoría en las soluciones de los ejercicios propuestos en la guía del profesor Cayetano Di Bartolo. En cada ejercicio se detallan los conceptos utilizados, las leyes, y carpintería matemática, así como también en la mayoría de los casos se brinda un apoyo gráfico para un entendimiento más preciso de qué se está trabajando en cada problema.

Al ofrecer la solución de los problemas de la guía, no significa que estén exentos de errores, por lo que en caso de encontrar discrepancias o errores en las siguientes páginas notificarlo a mi correo **erasmo97@gmail.com**, para ser revisado y modificado para la siguiente revisión del texto.

Espero que sea de gran ayuda para el entendimiento y aplicación de los conceptos teóricos en los ejercicios prácticos, y que con ello vengan excelentes resultados académicos para la aprobación de esta materia.

¡Mucho Éxito!

Erasmus A. Iñiguez B.
Ing. Mecánica. 14'

Observación: Cabe señalar que la autoría y elaboración de los planteamientos de los problemas es obra del Prof. Cayetano Di Bartolo, ex-profesor del Departamento de Física de la Universidad Simón Bolívar.

Di Bartolo, C. (2007). *Guía de Problemas Física IV (FS-2212), Parte 1-9*. Universidad Simón Bolívar. Caracas.

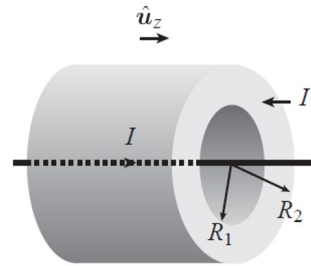
Índice general

0.1. Ley de Ampère	1
0.2. Ley de Faraday	10
0.3. Inductancia y energía magnética	20
0.4. Circuitos RL y Oscilaciones LC	30
0.5. Circuitos Corriente Alterna	38
0.6. Magnetización y materiales magnéticos	51
0.7. Ondas electromagnéticas	57
0.8. Óptica	65

0.1. Ley de Ampère

1. Considere un cable coaxial, de longitud infinita, formado por un hilo de corriente y un cilindro conductor de radio interno R_1 y radio externo R_2 . Por el hilo conductor circula una corriente I que regresa por el cilindro conductor, distribuida uniformemente en la región $R_1 < R_2$.

Halle el campo magnético en la región $R_1 < r < R_2$, donde r es la distancia al eje común de los conductores. Haga un dibujo mostrando una de las líneas de campo magnético para esa región.



Solución: Como se tiene simetría cilíndrica en el problema, el campo magnético producido por una corriente axial, tendrá dirección tangencial, es decir $\vec{B} = B_\phi \hat{u}_\phi$. Por lo tanto para aplicar la Ley de Ampère, se considera una curva cerrada de radio r . Entonces

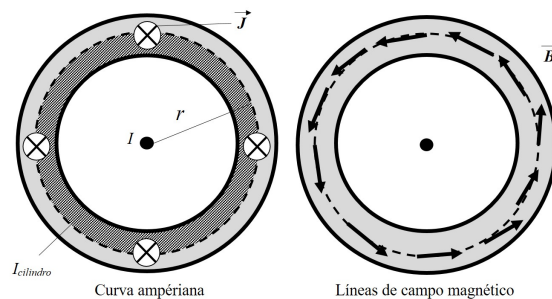
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi dl = B_\phi \oint_C dl = B_\phi (2\pi r) \quad (1)$$

Por otro lado como la corriente que circula por el cable I es uniforme, se tiene que el vector densidad de corriente \vec{J} , es $\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{u}_z$ donde A , representa el área total de la distribución, esta área encierra será $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$. Ahora, como se está buscando el campo dentro del cilindro, en la región $R_1 < r < R_2$, la corriente encerrada en la región interna del cilindro será:

$$\begin{aligned} I_{cilindro} &= \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{R_1}^r (2\pi r) \frac{I dr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{I}{R_2^2 - R_1^2} (r^2 - R_1^2) \\ \implies I_{cilindro} &= \frac{I(r^2 - R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned}$$

Luego, recordando que en el centro se encuentra un cable coaxial con una corriente en sentido contrario a la que fluye por el cilindro, y que según el sistema de referencia, ésta irá en sentido positivo, se tiene que la Amperiana encierra una corriente total de

$$I_{enc} = I - I_{cilindro} = I - \frac{I(r^2 - R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} \implies I_{enc} = I \left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (2)$$



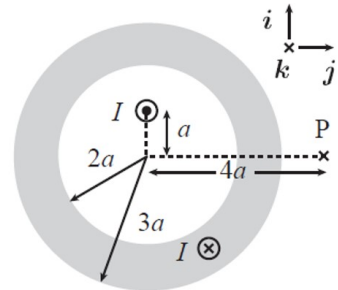
Finalmente, considerando la ley de Ampère en el vacío con las expresiones (1) y (2) se tiene

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \implies B_\phi (2\pi r) = \mu_0 I \left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

$$\text{Así, } B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \hat{u}_\phi}$$

2. El conductor cilíndrico de la figura tiene radios $2a$ y $3a$, y lleva una corriente I uniformemente distribuida. A una distancia a de su eje, un alambre recto infinito tiene una corriente I en sentido opuesto.

Encuentre el campo magnético que el conjunto produce en el punto P, el cual se encuentra en la línea perpendicular al eje del cilindro y al diámetro que pasa por el alambre, y a una distancia $4a$ del eje. Expresar sus resultados en la base cartesiana.



Solución: Para el conductor cilíndrico hueco, se busca el campo magnético fuera del cilindro, para ello se usa la ley de Ampère tomando una curva amperiana de radio r que encierra una corriente I , distribuida uniformemente. Entonces con la simetría cilíndrica nos queda

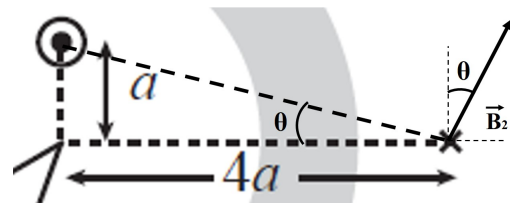
$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B_{1\phi}(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Como se busca el campo a una distancia $4a$, y considerando el sentido de la corriente se tiene que el campo que genera el cilindro es $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} (-\hat{i})$

Luego, buscaremos el campo que genera el alambre infinito en el punto P, para ello podemos considerar el campo que genera el alambre en la línea que une el punto P con su eje $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$,

Pero para expresar el vector tangencial en la base cartesiana debemos buscar el vector para ello, unimos el eje con el punto P y obtenemos las relaciones trigonométricas, donde la hipotenusa del triángulo de la figura es $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, es decir

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \cos(\theta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



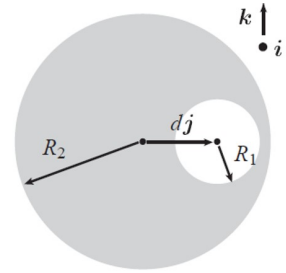
Por lo tanto el vector campo magnético $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{i})$, donde r es la distancia de separación entre el punto P y el cable infinito, que precisamente es la hipotenusa del triángulo $\sqrt{17}$, así

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{17}} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \hat{j} + \frac{4}{\sqrt{17}} \hat{i} \right) \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{34\pi a} (\hat{j} + 4\hat{i})$$

Finalmente usando superposición el campo magnético total creado en el punto P será la suma

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} (-\hat{i}) + \frac{\mu_0 I}{34\pi a} (\hat{j} + 4\hat{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{34\pi a} \left(-\frac{1}{4} \hat{i} + \hat{j} \right)}$$

3. El conductor cilíndrico de la figura tiene longitud infinita, radio R_2 y un agujero cilíndrico de radio R_1 paralelo al eje central. El eje central de la zona vacía tiene un vector posición $\mathbf{d} = d\hat{j}$ respecto al eje del cilindro conductor. Suponga que la corriente I del conductor está uniformemente distribuida y fluye en dirección \hat{i} que apunta hacia el lector.



Calcule el campo magnético en la región hueca del cilindro.

Solución: Usaremos superposición para calcular el campo dentro del hueco, para ello estamos considerando el campo que genera el conductor \vec{B}_1 en su interior y el que generaría un cilindro que rellenase el hueco en su interior $-\vec{B}_2$, es por ello que este campo se coloca negativo (porque físicamente en el problema no existe). Consideramos que ambos cilindros tienen la misma densidad de corriente $\vec{J} = \frac{I}{(R_2^2 - R_1^2)}\hat{i}$, aquí se toma en cuenta el área de la superficie sacando el hueco.

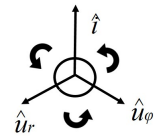
Para el primer campo \vec{B}_1 se toma la misma amperiana de radio r_1 (medido desde eje del cilindro macizo) que en los problemas anteriores de simetría cilíndrica

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \implies B_{1\phi}(2\pi r_1) = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \implies B_{1\phi}(2\pi r_1) = \mu_0 J \pi r_1^2$$

$$\implies \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 J r_1}{2} \hat{u}_\phi \implies \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 r_1 J}{2} (\hat{i} \times \hat{u}_{r1})$$

Observación: Es conveniente escribir el vector tangencial \hat{u}_ϕ , como producto vectorial de las otras dos componentes (ver Figura) para posteriormente encontrar la relación entre los dos campos.

De manera análoga se trabaja con el campo del cilindro que ocupa el hueco, pero esta vez considerando una amperiana de radio r_2 , entonces



$$\oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \implies B_{2\phi}(2\pi r_2) = \mu_0 J \pi r_2^2 \implies \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 r_2 J}{2} (\hat{i} \times \hat{u}_{r2})$$

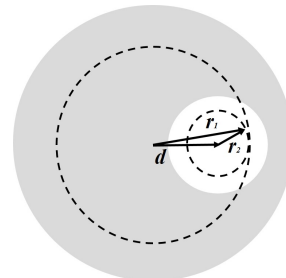
Por lo tanto por superposición se tiene que

$$\vec{B} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 r_1 J}{2} (\hat{i} \times \hat{u}_{r1}) - \frac{\mu_0 r_2 J}{2} (\hat{i} \times \hat{u}_{r2}) = \frac{\mu_0 J}{2} (r_1 (\hat{i} \times \hat{u}_{r1}) - r_2 (\hat{i} \times \hat{u}_{r2}))$$

agrupando los términos de las distancias radiales y sacando factor común

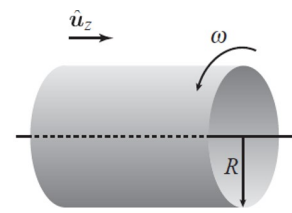
$$\implies \vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2} (\hat{i} \times r_1 \hat{u}_{r1}) - (\hat{i} \times r_2 \hat{u}_{r2}) \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 J \hat{i}}{2} \times (r_1 \hat{u}_{r1} - r_2 \hat{u}_{r2})$$

Ahora necesitamos encontrar la relación entre los vectores radiales, para ello observamos del diagrama a la derecha, que gráficamente se tiene la suma vectorial $\vec{d} + \vec{r}_2 = \vec{r}_1$, por tanto $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, además $\vec{J} = J\hat{i}$, entonces



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2} \vec{J} \times \vec{d} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} (\hat{i} \times \hat{j}) \implies \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \hat{k}}$$

4. Un cilindro muy delgado de longitud infinita tiene radio R , densidad superficial de carga constante σ y rota alrededor de su eje central con velocidad angular constante ω .



- a. Determine la densidad longitudinal de carga del cilindro.
- b. Halle el vector campo magnético en el interior del cilindro.

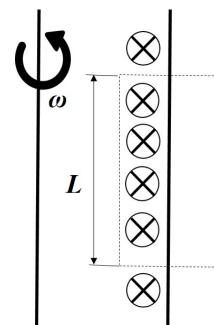
Solución: Recordamos que la densidad superficial de carga viene dada por $\sigma = \frac{Q}{A}$, donde A representa el área del cascarón

cilíndrico, es decir $A = 2\pi RL$, entonces $\sigma = \frac{Q}{2\pi RL} \Rightarrow Q = 2\sigma\pi RL$, además la densidad de carga lineal es $\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\sigma RL}{L}$, así $\boxed{\lambda = 2\pi\sigma R}$.

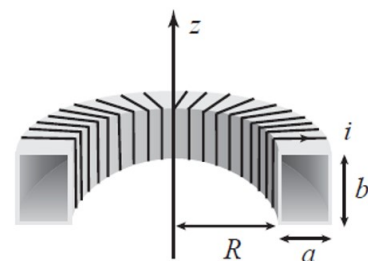
Tenemos que la densidad superficial de corriente viene dada por $\vec{K} = \sigma\vec{v}$, como el cilindro está rotando su velocidad lineal es $\vec{v} = \omega R\hat{u}_\phi$, así $\vec{K} = \sigma\omega R\hat{u}_\phi$

En este caso tenemos una corriente circular, por lo tanto se genera un campo en dirección axial, es decir necesitamos tomar una curva amperiana de longitud L , y se toma la suposición de que el campo fuera del conductor es cero. Por lo tanto, la ley de Ampère nos queda

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B dl = BL = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 KL \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0\sigma\omega R\hat{u}_z}$$



5. La figura muestra un embobinado de N vueltas en forma de toroide hueco con radio interno R y sección rectangular de lados a y b . Las vueltas del embobinado se dibujan algo separadas pero se supone que están muy apretadas. El eje del toroide coincide con el eje z y por el alambre del embobinado circula una corriente i .

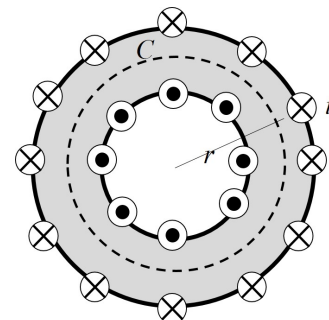


Suponga que las líneas de campo magnético en el interior del toroide son circunferencias paralelas al plano xy y con centro en el eje z . Calcule el campo magnético dentro del toroide e indique el sentido de las líneas de campo.

Solución: haciendo un corte transversal al toroide, se observa que debemos tomar una curva amperiana cerrada de radio r , concéntrica al eje de simetría del toroide. Además la dirección del campo magnético será circular en la dirección tangencial ya que esta distribución se interpreta como un solenoide envuelto en si mismo, que al envolverse el campo axial se convierte en una circunferencia, así $\vec{B} = B_\phi\hat{u}_\phi$

Entonces la integral de línea nos queda

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi dl = B_\phi \oint_C dl = B_\phi(2\pi r)$$

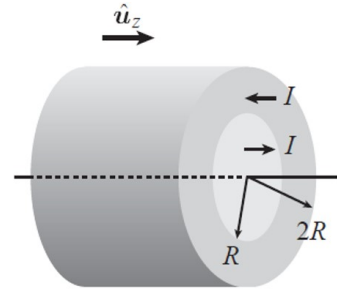


Por otro lado, la corriente que encierra la curva C , es la corriente i de cada espira, multiplicada por el número de vueltas, es decir $I_{enc} = Ni$. Finalmente usando la ley de Ampère se obtiene:

$$\oint_C B_\phi dl = \mu_0 I_{enc} \implies B_\phi(2\pi r) = \mu_0 Ni \implies \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi}$$

6. Considere un cable coaxial de longitud infinita, formado por un cilindro macizo conductor de radio R , y un cilindro conductor externo de radios R y $2R$. Por el cilindro interno circula una corriente I que regresa, en dirección opuesta, por el cilindro externo. Suponga que las corrientes en cada conductor están uniformemente distribuidas.

Halle el campo magnético en todos los puntos del espacio.



Solución: en este problema se identifican tres regiones del espacio donde se debe calcular el campo: la interna del cilindro macizo $\rho < R$, la región interna del otro cilindro $R < \rho < 2R$, y finalmente la región externa del cable $\rho > 2R$. Para cualquier región tomaremos una curva amperiana de radio ρ , debido a que la corriente axial genera un campo tangencial de la forma $\vec{B} = B_\phi \hat{u}_\phi$, con lo que en todos los casos la integral de línea

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi dl = B_\phi \oint_C dl = B_\phi(2\pi\rho)$$

Ahora, busquemos la corriente encerrada en cada región del espacio

Región 1 ($\rho < R$): en esta región, se tiene parte de la corriente del cilindro macizo, cuyo vector densidad de corriente es $\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi R^2} \hat{u}_z$, por lo tanto debemos calcular el flujo de este vector en una superficie circular de radio ρ , con lo que

$$I_{enc1} = \iint_S \vec{J}_1 \cdot d\vec{A} = \int_0^\rho (2\pi r) \frac{I dr}{\pi R^2} = \frac{2I}{R^2} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \implies I_{enc1} = \frac{I\rho^2}{R^2}$$

Luego el campo magnético en esta región será

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc1} \implies B_\phi(2\pi\rho) = \mu_0 \frac{I\rho^2}{R^2} \implies \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2} \hat{u}_\phi}$$

Región 2 ($R < \rho < 2R$): en esta región, se tiene la corriente I del cilindro macizo y parte de la corriente (que fluye en sentido opuesto) del cilindro externo, cuyo vector densidad de corriente es $\vec{J}_2 = \frac{I}{3\pi R^2} (-\hat{u}_z)$, por lo tanto debemos calcular el flujo de este vector en una superficie circular de radio ρ , con lo que

$$I_{enc2} = I - \iint_S \vec{J}_2 \cdot d\vec{A} = I - \int_R^\rho (2\pi r) \frac{I dr}{3\pi R^2} = I - \frac{2I}{3R^2} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{2} \right) = I \left(1 - \frac{\rho^2 - R^2}{3R^2} \right)$$

$$\Rightarrow I_{enc2} = I \left(\frac{3R^2 - \rho^2 + R^2}{3R^2} \right) \Rightarrow I_{enc2} = I \left(\frac{4R^2 - \rho^2}{3R^2} \right)$$

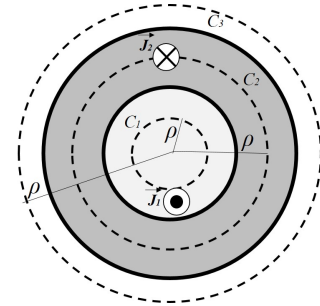
Luego el campo magnético en esta región será

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc1} \Rightarrow B_\phi(2\pi\rho) = \mu_0 I \left(\frac{4R^2 - \rho^2}{3R^2} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I (4R^2 - \rho^2)}{6\pi R^2 \rho} \hat{u}_\phi}$$

Región 3 ($\rho > 2R$): en esta región la corriente encerrada es la suma de las corrientes de los cilindros, es decir $I_{enc3} = I - I$, con lo que $I_{enc3} = 0$, por consiguiente $\boxed{\vec{B}_3 = \vec{0}}$

Finalmente el campo en todas las regiones será la función a trozos:

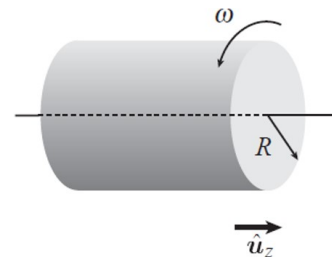
$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} \hat{u}_\phi & \text{si } \rho < R \\ \frac{\mu_0 I (4R^2 - \rho^2)}{6\pi R^2 \rho} \hat{u}_\phi & \text{si } R < \rho < 2R \\ 0 & \text{si } \rho > 2R \end{cases}$$



7. Un cilindro macizo de radio R y longitud infinita tiene una densidad volumétrica de carga ρ constante. El cilindro rota alrededor de su eje con velocidad angular ω constante.

Determine el campo magnético producido por el cilindro.

NOTA: Para determinar la simetría del campo imagine el cilindro como una superposición de casquetes cilíndricos rotando (solenoides).



Solución: Se tiene que el vector densidad de corriente es equivalente a $\vec{J} = \rho \vec{v}$, donde la velocidad lineal del movimiento circular es $\vec{v} = \omega r \hat{u}_\phi$, es decir $\vec{J} = \rho \omega r \hat{u}_\phi$.

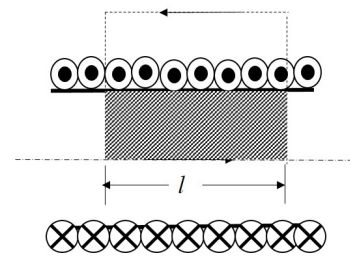
Es decir tenemos una corriente circular que, como en el caso del solenoide esta producirá un campo en la dirección axial $\vec{B} = B \hat{u}_z$ con lo que corresponde tomar una curva amperiana rectangular de longitud l y considerar que el campo en el exterior es cero.

Además la corriente encerrada por esta curva se calcula buscando el flujo del vector \vec{J} , es decir

$$I_{enc} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_r^R (ldr) \rho \omega r = \rho \omega l \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right)$$

$\Rightarrow I_{enc} = \frac{1}{2} \rho \omega l (R^2 - r^2)$. Entonces por ley de Ampère:

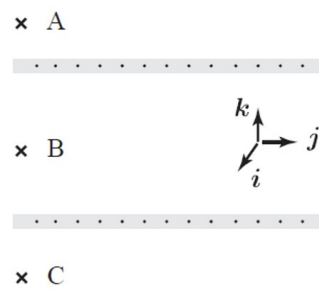
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow Bl = \mu_0 \frac{1}{2} \rho \omega l (R^2 - r^2) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{1}{2} \rho \omega (R^2 - r^2) \hat{u}_z}$$



8. Las dos placas infinitas que se muestran en la figura son paralelas al plano xy y conducen una corriente κ por unidad de longitud en dirección \hat{i} .

a. Calcule el campo magnético que produce cualquiera de los dos planos en todo el espacio.

b. Calcule el campo magnético neto que producen los dos planos en las 3 regiones: A, B y C

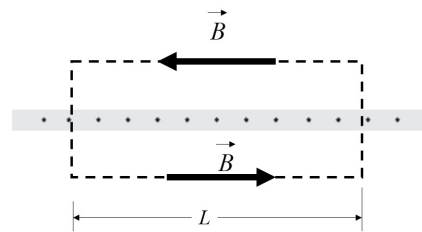


Solución: Seleccionamos cualquiera de las dos placas, como se tiene una corriente axial, esta generará un campo circular, y debido a la simetría del problema al tener una placa infinitamente ancha, este campo seguirá el recorrido de una curva amperiana definida como un rectángulo de ancho L , por lo tanto la corriente que encierra este rectángulo es $I_{enc} = \kappa L$

Luego, usando la ley de Ampère se tiene:

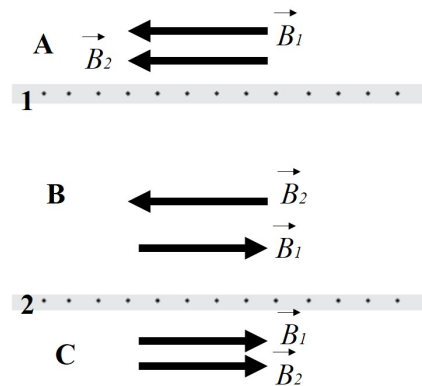
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B(2L) = \mu_0 \kappa L \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 \kappa$$

Este valor representa el módulo del campo, para definir la dirección nos damos cuenta en el diagrama que el campo tiene dos direcciones, una positiva y otra negativa en \hat{j} que depende si se esta por encima o por debajo de la placa, o en nuestro sistema de referencia si $k > 0$ o $k < 0$. Entonces



$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \kappa \begin{cases} +\hat{j} & \text{si } k < 0 \text{ (parte inferior)} \\ -\hat{j} & \text{si } k > 0 \text{ (parte superior)} \end{cases}$$

Ahora busquemos el campo neto que producen las dos placas, para ello debemos fijarnos la dirección de los vectores \vec{B} que generan ambas placas en cada una de las regiones. Llamaremos 1 a la placa inferior y 2 a la placa superior, con el diagrama de la derecha se observa que el campo neto será la suma vectorial de \vec{B}_1 y \vec{B}_2 en cada región. Así



$$\vec{B}_{neto} = \mu_0 \kappa \begin{cases} -\hat{j} & \text{en A} \\ 0 & \text{en B} \\ +\hat{j} & \text{en C} \end{cases}$$

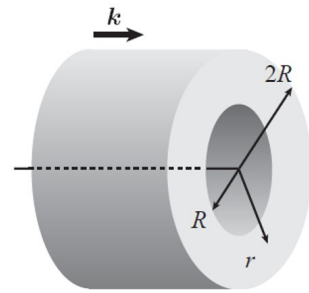
9. El conductor cilíndrico de la figura tiene longitud infinita y transporta una corriente I en dirección \hat{k} distribuida radialmente. Siendo la densidad superficial de corriente

$$J = 0 \text{ si } r < R \quad J = \frac{A}{r^2} \text{ si } R < r < 2R$$

donde A es una constante desconocida y r es la distancia al eje del cilindro (que se toma como eje z).

a. Halle la constante A .

b. Calcule el campo magnético en todos los puntos del espacio.



Solución: Para encontrar la constante A basta con encontrar la corriente total encerrada por el conductor para ello se busca el flujo del vector \vec{J} , como para $r < R$ $J = 0$, solo consideraremos el flujo del vector en la región $R < r < 2R$

$$I_{total} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_R^{2R} (2\pi r dr) \frac{A}{r^2} = 2\pi A \int_R^{2R} \frac{dr}{r} = 2\pi A \ln\left(\frac{2R}{R}\right) = 2\pi A \ln(2)$$

Recordemos que $I_{total} = I$, por lo tanto

$$I_{total} = 2\pi A \ln(2) \Rightarrow I = 2\pi A \ln(2) \Rightarrow A = \frac{I}{2\pi \ln(2)}$$

Ahora debemos encontrar el campo magnético en todas las regiones del espacio. Para cualquier región tomaremos una curva amperiana de radio r , debido a que la corriente axial genera un campo tangencial de la forma $\vec{B} = B_\phi \hat{u}_\phi$, con lo que en todos los casos la integral de línea

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi dl = B_\phi \oint_C dl = B_\phi(2\pi r)$$

Región 1 ($r < R$): en esta región, se tiene una densidad e corriente $J = 0$, por consiguiente la corriente encerrada $I_{enc} = 0$, y $\vec{B}_1 = \vec{0}$

Región 2 ($R < r < 2R$): en esta región, se tiene parte de la corriente del cilindro exterior, cuyo vector densidad de corriente es $\vec{J} = \frac{A}{r^2} \hat{u}_z$, por lo tanto debemos calcular el flujo de este vector en una superficie circular de radio r , con lo que

$$I_{enc2} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_R^r (2\pi r dr) \frac{A}{r^2} = 2\pi A \int_R^r \frac{dr}{r} = 2\pi A \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

sustituyendo la constante A calculada anteriormente

$$\Rightarrow I_{enc2} = 2\pi \left(\frac{I}{2\pi \ln(2)}\right) \ln\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow I_{enc2} = \frac{I}{\ln(2)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Luego el campo magnético en esta región será

$$\oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc2} \Rightarrow B_\phi(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\ln(2)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \ln(2)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{u}_\phi$$

Región 3 ($r > 2R$): en esta región, se tiene que la corriente encerrada es la total de la distribución, es decir $I_{enc3} = I$. Con lo que el campo magnético es similar al creado por un alambre infinito de corriente en el exterior. Así

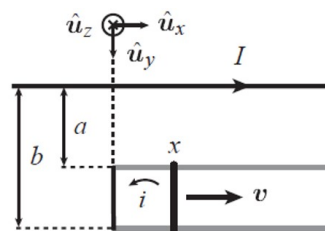
$$\oint_C \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc3} \Rightarrow B_\phi(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi}$$

Finalmente el campo en todas las regiones será la función a trozos:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r \ln(2)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{u}_\phi & \text{si } R < r < 2R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } r > 2R \end{cases}$$

0.2. Ley de Faraday

10. La figura muestra un alambre muy largo por el cual circula una corriente constante I , y dos rieles encima de los cuales se puede mover una barra de metal cuya resistencia es R . Los rieles están hechos de un material cuya resistencia es despreciable. Los extremos de los rieles (en $x = 0$) están hechos con un trozo del mismo material.



a. Halle el flujo magnético $\Phi(x)$ a través del rectángulo limitado por los rieles y la barra en la posición x .

b. Si la barra se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{u}_x (v > 0)$ halle la corriente que pasa a través de la barra y especifique en qué sentido circula.

Solución: Por la simetría del cable infinito y usando la ley de Ampère se conoce que el campo generado por el cable es $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$, por lo tanto podemos calcular el flujo del campo a través de un rectángulo diferencial de lado x y espesor dr , desde una distancia $r = a$ hasta $r = b$, entonces

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b (x dr) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\Phi(x) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Ahora, busquemos la derivada respecto al tiempo del flujo Φ , y recordamos que $\frac{dx}{dt} = v$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Luego, como se tiene un flujo magnético que varía en el tiempo y que además es positivo, de acuerdo a la Ley de Faraday se induce una fuerza electromotriz que se opone al crecimiento del flujo. De acuerdo a la ley de Lenz, como el campo es entrante, la dirección positiva es horaria, así la fem inducida está en sentido antihorario

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Finalmente la corriente inducida que circula en sentido antihorario a través de la barra es

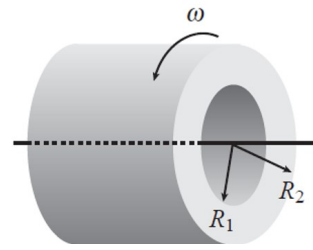
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} v \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

11. Un cilindro de radios R_1 y R_2 de longitud infinita tiene densidad volumétrica de carga D constante. El cilindro está rotando alrededor de su eje central con velocidad angular ω .

a. Determine el campo magnético producido por el cilindro en todos los puntos del espacio.

b. Suponga que la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo es constante $\frac{d\omega}{dt} = A = \text{cte}$. Calcule el campo eléctrico de la región hueca $r < R_1$.

NOTA: Tome las líneas de campo eléctrico como circunferencias centradas en el origen.



Solución: Se tiene que el vector densidad de corriente viene dado por $\vec{J} = D\vec{v}$. Recordando que la velocidad lineal del movimiento circular a una distancia r viene dado por $\vec{v} = \omega r \hat{u}_\phi$ por tanto $\vec{J} = D\omega r \hat{u}_\phi$

Como se tiene una corriente en dirección tangencial está generando un campo en la dirección axial $\vec{B} = B\hat{u}_z$, por lo tanto debemos tomar como curva amperiana un rectángulo de longitud L y además como en el caso del solenoide se toma el hecho de que el campo en el exterior del cilindro es nulo. Con lo que la integral de línea nos queda: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$

Se identifican dos regiones donde se debe calcular el campo, en el interior del hueco del cilindro ($r < R_1$) y dentro del cilindro ($R_1 < r < R_2$). En el exterior se toma el hecho de que el campo es nulo.

Buscamos las corrientes encerradas en cada región.

Región 1 ($r < R_1$). Cuando se toma el rectángulo amperiano, éste encierra la totalidad del interior del cilindro, con lo que

$$I_{enc1} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{R_1}^{R_2} (Ldr)D\omega r = D\omega L \int_{R_1}^{R_2} r dr \Rightarrow I_{enc1} = \frac{1}{2}D\omega L(R_2^2 - R_1^2)$$

Luego por la ley de Ampère:

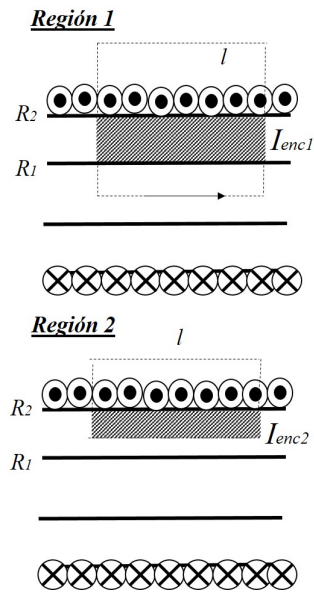
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 \Rightarrow BL = \mu_0 \frac{1}{2}D\omega L(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 D\omega (R_2^2 - R_1^2) \hat{u}_z}$$

Región 2 ($R_1 < r < R_2$): Cuando se toma el rectángulo amperiano, éste encierra una parte de la corriente del interior del cilindro desde el radio externo R_2 hasta el alto del rectángulo r , con lo que

$$I_{enc2} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_r^{R_2} (Ldr)D\omega r = D\omega L \int_r^{R_2} r dr \Rightarrow I_{enc2} = \frac{1}{2}D\omega L(R_2^2 - r^2)$$

Luego por la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 \Rightarrow BL = \mu_0 \frac{1}{2}D\omega L(R_2^2 - r^2) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0 D\omega (R_2^2 - r^2) \hat{u}_z}$$



Luego, debemos encontrar el campo eléctrico inducido en el hueco del cilindro, para ello se debe considerar una curva circular de radio r , ya que un campo magnético axial induce un campo eléctrico tangencial $\vec{E} = E\hat{u}_\phi$, por lo tanto por la ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Buscamos el flujo magnético del campo \vec{B}_1 a través de la superficie circular de radio r . Considerando que los vectores \vec{B} y $d\vec{A}$ son paralelos podemos escribir el flujo como

$$\Phi = \iint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = \vec{B}_1 \cdot \vec{A} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}\mu_0 D\omega(R_2^2 - r^2)\pi r^2$$

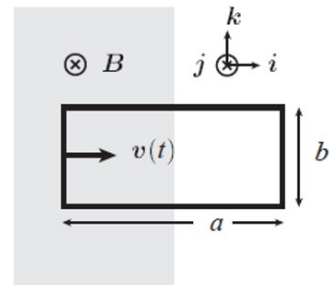
luego

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\mu_0 D\omega(R_2^2 - r^2)\pi r^2 \right) = \frac{1}{2}\mu_0 D\omega(R_2^2 - r^2)\pi r^2 \frac{d\omega}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}A\mu_0(R_2^2 - r^2)\pi r^2 \end{aligned}$$

Finalmente por la Ley de Faraday

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = -\frac{1}{2}A\mu_0 D(R_2^2 - r^2)\pi r^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4}A\mu_0 D(R_2^2 - r^2)r\hat{u}_\phi} \quad (\text{para } R < R_1) \end{aligned}$$

12. La figura muestra una espira rectangular que está saliendo de una región donde existe un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{j}$ estacionario y uniforme. La espira tiene masa M , lados a y b , resistencia R , inductancia despreciable, y se mueve con una velocidad variable $\mathbf{v} = kti$, donde t es el tiempo, y k una constante positiva.



a. Calcule la corriente inducida en la espira e indique su sentido.

b. Halle la fuerza magnética y la fuerza externa que actúan sobre la espira.

c. Calcule la potencia desarrollada por la fuerza externa y la potencia disipada en forma de calor.

Solución: Primero, como tenemos un campo magnético entrante el sentido positivo del flujo será horario, por ley de Lenz se debe inducir una corriente en el sentido en que disminuya el flujo magnético. Por lo tanto debemos encontrar el flujo, como tanto \vec{B} como $d\vec{A}$ son paralelos, el flujo será $\Phi = BA$, y $A = xb$ corresponde al área de la espira dentro de la región. Con lo que $\Phi = Bxb$, luego calculemos su derivada

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (Bxb) = Bb \frac{dx}{dt} = Bbv \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bbkt$$

Veamos que la derivada es una función lineal dependiente de $t > 0$, y es estrictamente positiva debido a que $Bbk > 0$, por lo tanto el flujo Φ es una función creciente. Pero debemos observar que a medida que la espira se aleja del campo magnético el área está

disminuyendo, por lo tanto la derivada de la posición es negativa $\frac{dx}{dt} < 0$, por lo tanto la derivada del flujo pasa a ser negativa, luego por la ley de Lenz se induce una corriente en sentido contrario al crecimiento del flujo, es decir la corriente inducida tiene sentido horario, ya que en la dirección de movimiento disminuye el flujo. Por Ley de Faraday

$$\varepsilon = -(-)\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = Bbkt$$

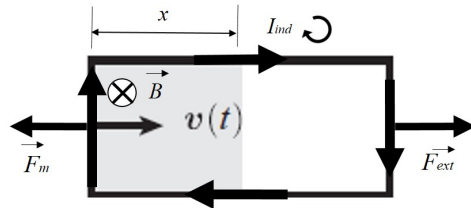
Luego recordemos que por ley de Ohm

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{R} \Rightarrow I_{ind} = \frac{Bbkt}{R}$$

Ahora busquemos la fuerza magnética que produce la corriente inducida sobre la espira rectangular, recordemos que

$$\vec{F}_m = I_{ind} \int d\vec{l} \times \vec{B} = I_{ind}(\vec{b} \times \vec{B})$$

Veamos que la fuerza magnética sólo será aplicada sobre el segmento vertical izquierdo, que es el que se encuentra dentro de la región del campo magnético, en los segmentos horizontales, las fuerzas se anulan mutuamente al poseer direcciones opuestas, y en el segmento vertical derecho no actúa la fuerza magnética por estar fuera de la región donde existe el campo. Entonces



$$\vec{F}_m = I_{ind}\vec{b} \times \vec{B} = \frac{Bbkt}{R}Bb(-\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{B^2b^2kt}{R}(-\hat{i})$$

Luego para buscar la fuerza externa recurrimos a la segunda Ley de Newton, ya que la fuerza externa a la que produce el movimiento hacia afuera y la corriente inducida contrarresta la acción de esta fuerza externa. Tenemos

$$\Sigma \vec{F} = M \frac{dv}{dt} \Rightarrow F_{ext} - F_m = Mk \Rightarrow F_{ext} = Mk - F_m \Rightarrow \vec{F}_{ext} = \left(Mk - \frac{B^2b^2kt}{R} \right) \hat{i}$$

La potencia disipada en forma de calor, será la disipada por la resistencia producto de la corriente inducida

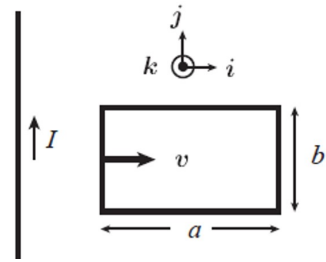
$$P_c = I^2R = \left(\frac{Bbkt}{R} \right)^2 R \Rightarrow P_c = \frac{(Bbkt)^2}{R}$$

Y la potencia que desarrolla la fuerza externa viene dada por

$$P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = F_{ext}v = \left(Mk - \frac{B^2b^2kt}{R} \right) kt \Rightarrow P_{ext} = Mk^2t - \frac{(Bbkt)^2}{R}$$

13. La espira rectangular de la figura se aleja con velocidad v de la corriente rectilínea. Por el hilo recto circula una corriente I y la espira tiene resistencia R . Suponga despreciable el efecto del campo magnético inducido.

Calcule la corriente inducida en la espira y dibuje su sentido.



Solución: Recordemos que el campo magnético producido por un alambre que transporta una corriente rectilínea viene dado por $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$, en el caso particular de la región por donde se mueve la espira el vector campo eléctrico tendrá la dirección dada por la regla de la mano derecha, es decir $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{k})$.

Como se tiene un campo entrante (dirección $-\hat{k}$) se define como sentido positivo del flujo magnético, el sentido horario. Calculemos el flujo magnético a través de un rectángulo de alto b y anchura diferencial dr :

$$\Phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B b dr = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{r+a}{r} \right)$$

Ahora busquemos la derivada del flujo

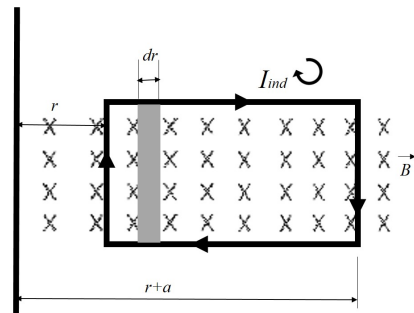
$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\frac{r+a}{r} \right) \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left(\frac{r}{r+a} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{r+a}{r} \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left(\frac{r}{r+a} \right) \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{a}{r} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left(\frac{r}{r+a} \right) \left(-\frac{a}{r^2} \right) \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\text{velocidad}} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a b}{2\pi r(r+a)} v \end{aligned}$$

Notemos que el signo de la derivada es negativo, para $r > 0$, por lo tanto el flujo es decreciente en la dirección de movimiento de la espira, por lo tanto por Ley de Lenz se induce una corriente que favorece el decrecimiento del flujo magnético, es decir en este caso se induce una corriente en el mismo sentido positivo escogido, por lo tanto la corriente I_{ind} está en sentido horario.

Por ley de Faraday la fem inducida viene dada por $\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$, y recordand la ley de Ohm $\varepsilon = IR$, se obtiene finalmente que la corriente inducida es

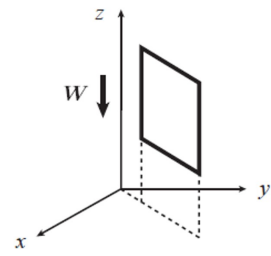
$$I_{ind} = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi r(r+a)R} v$$

Observación: Debemos ser cuidadoso con la notación, recordemos que r representa la distancia del cable infinito hasta la parte izquierda de la espira, y R representa la resistencia interna de la espira.



14. La espira de la figura tiene superficie S , resistencia R y está girando en torno al eje z con velocidad angular constante \mathbf{W} . La espira se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme y constante $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$.

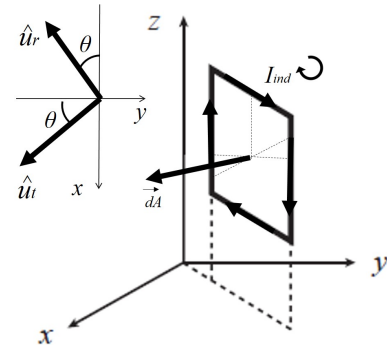
Calcule la corriente inducida en la espira. Señale en el dibujo su dirección. Considere despreciable la autoinductancia de la espira.



Solución: En este caso se tiene un vector $d\vec{A} = dA\hat{u}_t$ orientado hacia la dirección radial del movimiento que describe la espira, es decir si consideramos el sistema de referencia de la figura y la dirección horaria con la que gira la espira (puesto que el vector velocidad angular \vec{W} apunta hacia abajo), se tiene que un vector unitario en la dirección radial es de la forma $\hat{u}_t = \sin(\theta)\hat{i} - \cos(\theta)\hat{j}$, es decir $\boxed{d\vec{A} = dA(\sin(\theta)\hat{i} - \cos(\theta)\hat{j})}$.

Donde recordemos que θ es la variación del ángulo en el movimiento circular, es decir $\theta = \omega t$. Luego conociendo el vector \vec{B} (uniforme y constante) y el $d\vec{A}$ podemos calcular el flujo magnético.

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= \iint_S (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \cdot dA(\sin(\omega t)\hat{i} - \cos(\omega t)\hat{j}) \\ &= \iint_S (B_x \sin(\omega t) - B_y \cos(\omega t)) dA \\ \Rightarrow \Phi &= (B_x \sin(\omega t) - B_y \cos(\omega t)) \underbrace{\iint_S dA}_S \Rightarrow \Phi = (B_x \sin(\omega t) - B_y \cos(\omega t))S\end{aligned}$$



Derivamos la expresión del flujo magnético

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}((B_x \sin(\omega t) - B_y \cos(\omega t))S) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \omega S(B_x \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t))$$

Según la ley de Faraday la fem inducida será

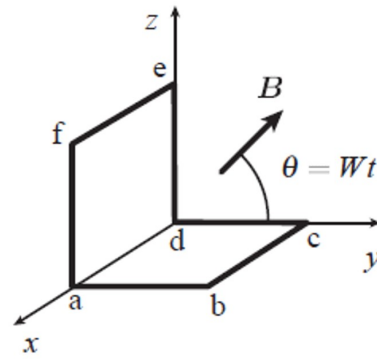
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \omega S(-B_x \cos(\omega t) - B_y \sin(\omega t))$$

Y siguiendo la ley de Ohm, la corriente inducida por el campo magnético es:

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\omega S}{R}(-B_x \cos(\omega t) - B_y \sin(\omega t))}$$

Respecto al signo de esta corriente, observemos que tanto el coseno o el seno cambian de signo según varía el tiempo en rangos de $\frac{2\pi}{\omega}$, con lo que la corriente irá cambiando su sentido a través de que pase el tiempo, ya que según sea la relación de magnitud entre B_x y B_y , podríamos obtener un número con signo contrario. Lo que sí podemos afirmar es el sentido inicial de la corriente lo define la Ley de Lenz, veamos que tenemos un campo magnético que coloca como sentido positivo, el sentido horario, por lo tanto se induce una corriente que impida el crecimiento del flujo, y veamos que la derivada inicialmente es negativa, por lo tanto la corriente inducida inicialmente está en sentido horario, ya que favorece el decrecimiento del flujo.

15. Una espira abcdefa tiene la forma dada en la figura. La parte abcd está formada por 3 alambres rectos en el plano xy y la parte defa lo mismo pero en el plano xz . Todos los tramos rectos tienen longitud l . Un campo magnético \vec{B} , siempre paralelo al plano yz tiene magnitud constante B y rota alrededor del eje x . El ángulo θ que forma con el eje y está dado por Wt donde t es el tiempo.



- Encuentre el flujo a través de la espira.
- Encuentre la corriente $I(t)$ en la espira, si su resistencia es R .

NOTA. Suponga despreciable el efecto del campo magnético inducido.

Solución: Para buscar el flujo magnético debemos dividir en dos partes el cálculo, uno para el flujo por la parte abcd y otro para la parte defa de la espira. Además recordamos la definición del producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$.

Parte abcd: Esta pedazo de espira tiene un área $A_1 = l^2$, $d\vec{A} = dA\hat{u}_z$, por lo tanto forma un ángulo α (complementario de θ), con el campo \vec{B} , es decir $\cos \alpha = \sin \theta$, luego para el flujo se tiene que:

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} B dA \cos \alpha = B \sin(Wt) \underbrace{\iint_{S_1} dA}_{l^2} \Rightarrow \Phi_1 = Bl^2 \sin(Wt)$$

Parte defa: Esta pedazo de espira tiene un área $A_2 = l^2$ y vector $d\vec{A} = dA\hat{u}_y$, por lo tanto forma un ángulo θ con el campo \vec{B} , luego para el flujo se tiene que:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_2} B dA \cos \theta = B \cos(Wt) \underbrace{\iint_{S_2} dA}_{l^2} \Rightarrow \Phi_2 = Bl^2 \cos(Wt)$$

Luego, el flujo total será

$$\boxed{\Phi = Bl^2(\cos(Wt) + \sin(Wt))}$$

Entonces, si tomamos la derivada del flujo, obtenemos

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Bl^2(\cos(Wt) + \sin(Wt))) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = Bl^2W(\cos(Wt) - \sin(Wt))$$

Luego, por ley de Faraday, la fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = Bl^2W(\sin(Wt) - \cos(Wt))$$

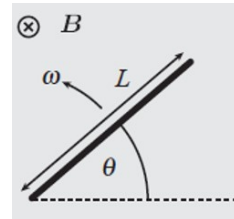
Finalmente por Ley de Ohm, la corriente inducida será:

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{R} \Rightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{Bl^2W}{R}(\sin(Wt) - \cos(Wt))}$$

Observación: En este problema se utilizó el signo negativo que viene de la Ley de Faraday, ya que en principio es complicado determinar el sentido inicial de la corriente, lo que si podemos afirmar es que ésta cambiará a través del tiempo su sentido, al estar compuesta de una suma algebraica de funciones sinusoidales que cambian de signo a través del tiempo. Por ello, para dar la respuesta final de la corriente inducida I_{ind} , se pudo haber tomado o no el signo dado por la Ley de Faraday, e independientemente hubiéramos obtenido un resultado correcto.

16. Una barra de longitud L gira con una frecuencia angular ω constante en un campo uniforme \mathbf{B} como muestra la figura.

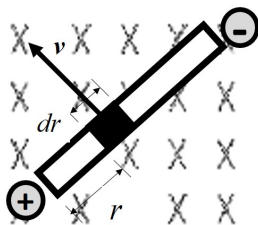
Calcule la f.e.m. entre los dos extremos de la barra.



Solución: consideramos un elemento diferencial de barra de espesor dr a una distancia r del centro, con lo que un diferencial de la f.e.m. viene dado por $d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$, considerando que \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares, y su producto vectorial es paralelo al vector dr , se tiene $d\varepsilon = \omega r B dr$.

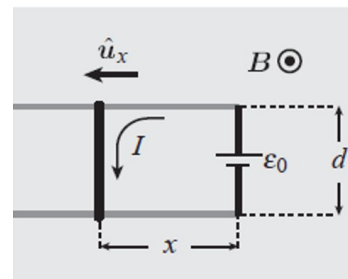
Luego, sumamos las contribuciones de todos los elementos diferenciales desde $r = 0$ hasta $r = L$ con la integral

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L \omega r B dr = \omega B \int_0^L r dr = \omega B \frac{L^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \omega B L^2}$$



17. Un alambre metálico de masa m y resistencia R se desliza sin fricción sobre dos rieles separados una distancia d y con resistencia despreciable. Perpendicular a las vías existe un campo magnético uniforme. La pila proporciona una fuerza electromotriz constante ε_0 . Suponga que el alambre estaba inicialmente en reposo.

Calcule, en función del tiempo, la velocidad del alambre y la corriente que lo atraviesa.



Solución: como tenemos un campo magnético uniforme y constante, y los vectores \vec{B} y $d\vec{A}$ son paralelos, el flujo viene dado por $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$, recordando que A , es el área encerrada por la barra y los rieles a medida, que la barra avanza. Entonces $\Phi = B dx$. Por lo tanto la derivada del flujo es: $\frac{d\Phi}{dt} = B dv$, donde v , es la velocidad o la tasa de cambio de la distancia x .

Como el flujo es creciente en la dirección de movimiento de la barra, por la ley de Lenz se induce una corriente que contrarresta el crecimiento del flujo, es decir si el campo

saliente define como positivo el sentido antihorario, la corriente autoinducida estará en sentido horario.

Siguiendo la ley de Faraday $|\varepsilon_{ind}| = Bdv$, por lo tanto por Ley de Ohm $I_{ind} = \frac{Bdv}{R}$

Pero notemos que esta velocidad depende del tiempo. Además la corriente total del circuito será $I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{ind}}{R}$, ya que existe una pila que proporciona una f.e.m adicional. Y esta corriente genera una fuerza magnética que permite el movimiento de la barra, y viene dada por

$$\vec{F}_m = \int I \vec{dl} \times \vec{B} = I \underbrace{\vec{L}}_{-d\hat{u}_y} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{R} Bd(\hat{u}_x) \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\varepsilon - Bdv}{R} Bd(\hat{u}_x)$$

Recordando la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \vec{F}_m = m\vec{a} &\Rightarrow \frac{\varepsilon - Bdv}{R} Bd = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon Bd}{mR} - \frac{B^2 d^2}{mR} v \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \left(\frac{B^2 d^2}{mR} \right) v = \frac{\varepsilon Bd}{mR}} \end{aligned}$$

Esta es la ecuación diferencial que debemos resolver para obtener la función velocidad $v(t)$, este tipo de ecuación diferencial es muy común en este curso en la sección de circuitos RL, y tiene una solución conocida de la forma

$$v(t) = v_\infty - (v_0 - v_\infty)e^{-t/\tau}$$

donde tanto v_0 y v_∞ son la condición inicial y asíntotica que estan dadas en el problema y de manera implícita en la ecuación diferencial. Además $1/\tau$ es una constante también implícita en la ED, y es el término constante que acompaña a la v .

$$\frac{dv}{dt} + \underbrace{\left(\frac{B^2 d^2}{mR} \right)}_{1/\tau} v = \frac{\varepsilon Bd}{mR}$$

Para hallar v_∞ busquemos que aparezca la constante $1/\tau$ en la parte derecha de la igualdad, para ello dividimos y multiplicamos por:

$$\frac{dv}{dt} + \underbrace{\left(\frac{B^2 d^2}{mR} \right)}_{1/\tau} v = \frac{\varepsilon Bd}{mR} \left(\frac{Bd}{Bd} \right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \underbrace{\left(\frac{B^2 d^2}{mR} \right)}_{1/\tau} v = \underbrace{\left(\frac{B^2 d^2}{mR} \right)}_{1/\tau} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{Bd} \right)}_{v_\infty}$$

Por lo tanto las constante a utilizar para la solución de la ecuación diferencial son

$$\frac{1}{\tau} = \frac{B^2 d^2}{mR} \quad v_0 = 0 \quad v_\infty = \frac{\varepsilon}{Bd}$$

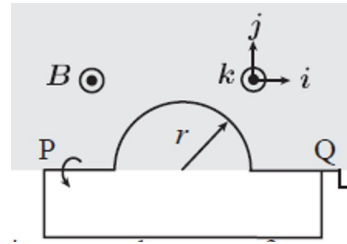
Así

$$v(t) = \frac{\varepsilon}{Bd} - \frac{\varepsilon}{Bd} e^{-\frac{B^2 d^2}{mR} t} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{\varepsilon}{Bd} (1 - e^{-\frac{B^2 d^2}{mR} t})}$$

Para encontrar $I(t)$ sustituimos nuestra función obtenida $v(t)$ en la expresión de la corriente total

$$I = \frac{\varepsilon - Bdv}{R} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{Bd}{R} \left(\frac{\varepsilon}{Bd} (1 - e^{-\frac{B^2 d^2}{mR} t}) \right) \Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{B^2 d^2}{mR} t}}$$

18. Un cable rígido de forma semicircular de radio r rota con una velocidad angular uniforme ω alrededor del eje PQ, en un campo magnético $B = B_0 \cos(\omega t) \hat{k}$ (saliendo de la hoja), siendo B_0 una constante positiva. Consideremos tiempos t tales que $0 < t < \pi/(4\omega)$. Desprecie la autoinductancia.



a. Calcule la fuerza electromotriz inducida en el circuito. Para el instante t haga una figura y muestre en ella el sentido de la fuerza electromotriz.

b. Si la resistencia de todo el circuito es R , calcule el tiempo que debe transcurrir para que la corriente valga la mitad de la corriente máxima.

Solución: Veamos que el vector campo magnético y el vector $d\vec{A}$ a medida que rota la espira, forman un ángulo $\theta = \omega t$ entre ellos, que debemos considerar cuando se haga el producto punto. Al tener un campo uniforme y un área de semicírculo que atraviesa el flujo magnético en el tiempo t establecido, será

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| |\vec{A}| \cos(\theta) = (B_0 \cos(\omega t)) \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) (\cos(\omega t)) \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} B_0 \pi r^2 \cos^2(\omega t)$$

Derivamos el flujo con respecto al tiempo

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B_0 \pi r^2 \cos^2(\omega t) \right) = \frac{B_0 \pi r^2}{2} (\omega \underbrace{(-2) \cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{-\sin(2\omega t)}) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} B_0 \pi r^2 \omega \sin(2\omega t)$$

Con el intervalo $0 < t < \pi/(4\omega)$, se tiene que $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, puesto que los valores del seno están contenidos en ángulos del primer cuadrante y la expresión toma el signo negativo, es decir, el flujo es decreciente en la dirección de rotación de la espira, por lo tanto por Ley de Lenz se induce una corriente que sigue la dirección de la disminución del flujo, como el campo saliente define el sentido antihorario como el positivo, entonces se induce la corriente y la f.e.m. en sentido antihorario.

Luego, por Ley de Faraday, la f.e.m inducida será

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \frac{B_0 \pi r^2 \omega \sin(2\omega t)}{2}$$

Por otro lado, con la ley de Ohm $I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \frac{B_0 \pi r^2 \omega \sin(2\omega t)}{2R}$ donde $I_{max} = \frac{B_0 \pi r^2 \omega}{2R}$,

Entonces tenemos una corriente sinusoidal de la forma $I(t) = I_{max} \sin(2\omega t)$

Ahora busquemos para qué valor de t $I = \frac{I_{max}}{2}$, para ello necesitamos resolver la ecuación

$$\frac{I_{max}}{2} = I_{max} \sin(2\omega t) \Rightarrow \sin(2\omega t) = \frac{1}{2}$$

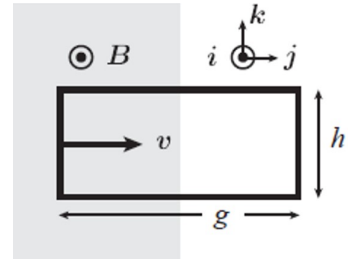
Es decir debemos encontrar para qué valor el seno es igual a $1/2$, esto se logra cuando el argumento del seno es $\pi/6$ o 30 grados.

$$\sin(2\omega t) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\omega t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{12\omega}$$

0.3. Inductancia y energía magnética

19. La figura muestra una espira rectangular que está saliendo con velocidad constante $\vec{v} = v\hat{j}$ de una región donde existe un campo magnético externo $\vec{B} = B\hat{i}$ uniforme y estacionario. La espira tiene autoinductancia L , resistencia R y lados de longitud g y h .

Calcule la corriente inducida en la espira si inicialmente no circula corriente por ella. Indique su sentido.



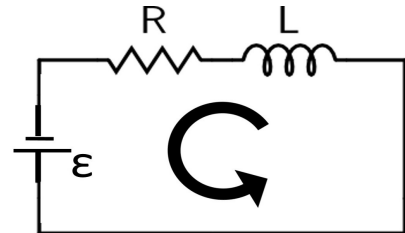
Solución: Como se tiene un campo uniforme y constante, y considerando que atraviesa un área $A = yh$, donde y representa la distancia horizontal que está dentro de la región donde existe el campo magnético, el flujo será

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = Bhy$. Luego $\frac{d\Phi}{dt} = Bh\frac{dy}{dt}$ pero veamos que y es decreciente a medida que la espira sale de la región ya que disminuye la sección que atraviesa el campo, por lo tanto el flujo será decreciente y entonces $-\frac{dy}{dt} = v$, luego $\frac{d\Phi}{dt} = -Bhv$

Por la ley de Lenz se induce una corriente que se opone al crecimiento del flujo, como el campo magnético es saliente, se toma como sentido positivo el sentido antihorario, y como a medida que sale la espira el flujo disminuye, la corriente inducida sigue el sentido antihorario. Luego por la Ley de Faraday, la f.e.m. inducida es: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = Bhv$

Luego como la inductancia de la espira NO es despreciable, la corriente inducida del circuito no es constante, sino una función del tiempo. Para obtener dicha función debemos considerar un circuito RL de corriente directa (como se muestra en la figura). De este circuito se tiene la ecuación de malla con el sentido mostrado

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}}$$



Tenemos una ecuación diferencial con solución conocida de la forma

$$I(t) = I_{\infty} + (I_0 - I_{\infty})e^{-t/\tau}$$

donde I_{∞} y $1/\tau$ son constantes que se obtienen implícitamente de la ecuación diferencial, para ello reescribimos convenientemente la ecuación

$$\frac{dI}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{1/\tau} I = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L} \frac{R}{R} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \underbrace{\frac{R}{L}}_{1/\tau} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)}_{I_{\infty}}$$

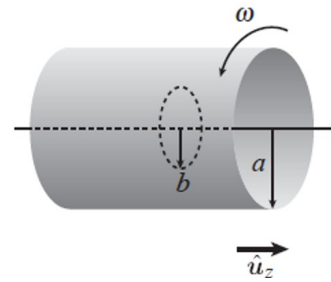
Por lo tanto considerando las constantes obtenidas y la condición inicial que establece el problema $I_0 = 0$, tenemos

$$I(t) = I(t) = I_{\infty} + (I_0 - I_{\infty})e^{-t/\tau} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

Finalmente sustituyendo el valor de la f.e.m. obtenida

$$\boxed{I(t) = \frac{Bhv}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)} \text{ (en sentido antihorario)}$$

20. Un cilindro muy delgado de longitud infinita y radio a tiene una densidad superficial de carga constante σ y rota alrededor de su eje central con velocidad angular $\omega = Kt$, donde t es el tiempo y K una constante desconocida.



a. Especifique algún sistema de coordenadas y halle el vector campo eléctrico en el interior del cilindro.

b. En el interior del cilindro se coloca una espira circular, de resistencia R , autoinductancia L , y radio b ($b < a$), perpendicular al eje del cilindro y con centro sobre dicho eje. Halle la corriente inducida en la espira e indique si su sentido es igual o es opuesto al giro del cilindro. Suponga que para $t = 0$ la corriente inducida es cero.

Solución: Recordemos que el vector densidad de corriente superficial, viene dado por $\vec{K} = \sigma \vec{v} \Rightarrow \vec{K} = \sigma \omega a \hat{u}_\phi$. Siguiendo el mismo procedimiento que usamos para la Ley de Ampère se toma un rectángulo amperiano de longitud l , con lo que el campo magnético del cilindro será

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Rightarrow Bl = \mu_0 \sigma \omega a l \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \sigma \omega a \hat{u}_z$$

Buscamos el flujo de este campo a través de un superficie circular de radio $r < a$ dentro del cilindro. $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA = \mu_0 \sigma \omega a (\pi r^2)$. Luego la derivada del flujo será:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu_0 \sigma \omega a \pi r^2) = \mu_0 \sigma a \pi r^2 \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\frac{d}{dt}(Kt)=K} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \sigma K a \pi r^2$$

Observemos que la derivada del flujo siempre es positiva, por lo tanto el campo es creciente, por la Ley de Lenz se induce una corriente en sentido de la disminución del campo, como el campo magnético dentro del cilindro establece como sentido positivo el antihorario, la corriente inducida tiene sentido horario. Como se tiene un campo magnético axial variable, éste induce un campo eléctrico tangencial, por la ley de Faraday la circulación de este campo a través de una circunferencia de radio r , es:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = -\mu_0 \sigma K a \pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 \sigma K a r}{2} (-\hat{u}_\phi)}$$

Para la siguiente parte, se introduce una espira de radio b , en el interior del cilindro, por lo tanto el flujo del campo magnético y la derivada por esta espira será

$$\Phi = \mu_0 \sigma \omega a \pi b^2 \quad \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \sigma K a \pi b^2$$

Por la Ley de Faraday como se tiene un flujo que crece en el tiempo se induce una f.e.m. en sentido opuesto al de giro, es decir, horario, y viene dada por: $\varepsilon = -\mu_0 \sigma K a \pi b^2$.

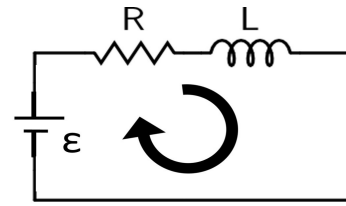
Como la inductancia de la espira no es despreciable, debemos resolver el circuito RL de corriente directa de la figura para hallar la corriente como función del tiempo. El circuito tiene ecuación de malla:

$$\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}$$

La solución de esta ecuación diferencial fue dada en el problema anterior 19. Entonces

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \Rightarrow I(t) = \frac{\mu_0 \sigma K a \pi b^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

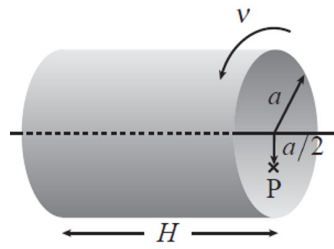
Esta corriente circula en sentido opuesto al de giro del cilindro.



21. Un cilindro muy delgado de longitud infinita y radio a tiene una carga eléctrica uniformemente distribuida en su superficie, de densidad longitudinal λ C/m y rota alrededor de su eje con frecuencia ν revoluciones/s

a. Encuentre la autoinductancia en un trozo de longitud H . **b.** Si $\nu = At$, donde A es una constante y t es el tiempo, encuentre el campo eléctrico inducido a una distancia $a/2$ del eje, para $t > 0$

NOTA: Las líneas de campo eléctrico son circunferencias centradas en el eje del cilindro.



Solución: Recordemos que para calcular la inductancia conocemos que $L = \frac{\Phi}{I}$ donde Φ es el flujo propio sobre una superficie circular del radio del cilindro, y I la corriente total de la distribución.

Se tiene de un diferencial de corriente, viene dado por $dI = \frac{dQ}{T}$, donde T representa el periodo de rotación del cilindro, es decir $T = 1/\nu$, por lo tanto

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\lambda dz}{1/\nu} \Rightarrow dI = \lambda \nu dz \Rightarrow \int dI = \lambda \nu \int_0^H dz \Rightarrow I = \lambda \nu H$$

Por otro lado, de este resultado se obtiene que la densidad de corriente por unidad de longitud será $K = \lambda \nu$, luego usando un rectángulo amperiano de lado l y con la ley de Ampère el campo magnético dentro del cilindro será:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow Bl = \mu_0 \lambda \nu l \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \lambda \nu \hat{u}_z$$

Luego, consideremos el auto flujo del campo magnético sobre una superficie circular del radio del cilindro a , $\Phi = \mu_0 \lambda \nu \pi a^2$ entonces

$$L = \frac{\Phi}{I} \Rightarrow \frac{\mu_0 \lambda \nu \pi a^2}{\lambda \nu H} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \pi a^2}{H}$$

Ahora, debemos buscar el campo eléctrico inducido en el interior del cilindro, para ello consideramos el flujo magnético sobre una superficie genérica de radio $r < a$, es decir $\Phi = \mu_0 \lambda \nu \pi r^2$, con lo que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \lambda \pi r^2 \underbrace{\frac{d\nu}{dt}}_{\frac{d}{dt}(At)=A} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \lambda A \pi r^2$$

Entonces por la Ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E(2\pi r) = -\mu_0 \lambda A \pi r^2 \Rightarrow E = -\frac{\mu_0 \lambda A r}{2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu_0 \lambda A r}{2} (-\hat{u}_\phi)$$

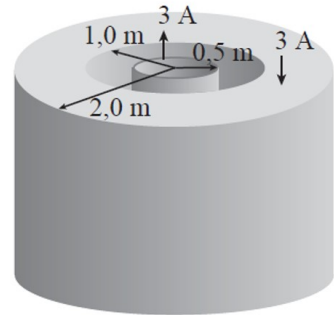
Finalmente sustituyendo $r = a/2$ se tiene

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 \lambda A a}{4} (-\hat{u}_\phi)}$$

22. Un circuito está compuesto de dos cilindros coaxiales de longitud infinita. El cilindro interno tiene espesor despreciable y un radio de 0,5 m. El cilindro externo tiene radios 1,0 y 2,0 m. Una corriente de 3 A entra por el cilindro interno y regresa por el externo con una distribución uniforme.

Calcule la energía almacenada por unidad de longitud en el campo magnético, y la autoinductancia por unidad de longitud del circuito.

NOTA: Suponga que los cilindros son de longitud $H \rightarrow \infty$



Solución: Primero debemos calcular el campo magnético en todas las regiones internas del sistema de los dos cilindros.

Se denotan los radios internos $a = 0,5$ m, $b = 1,0$ m, $c = 1,5$ m, y en todas las regiones la integral de línea de la Ley de Ampère se completa usando un circuito amperiano circular de radio r , pues se tiene una corriente axial que genera un campo con líneas en dirección tangencial $\vec{B} = B\hat{u}_\phi$ es decir

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$$

Región $r < a$: Para esta región tenemos que la corriente encerrada es nula $I_{enc} = 0$, por lo tanto $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Región $a < r < b$: Para esta región se encierra la corriente total del cilindro de menor radio, es decir $I_{enc} = I$, por lo tanto el campo magnético será

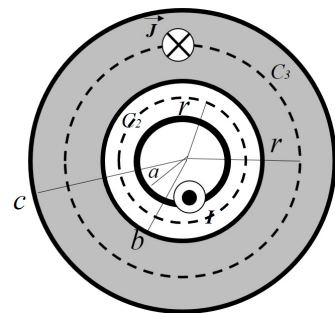
$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow B_2(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Región $b < r < c$: Para esta región se encierra la corriente total del cilindro de menor radio, y una parte de la corriente del cilindro macizo cuya densidad de corriente viene dada por

$\vec{J} = \frac{I}{A} (-\hat{u}_z) \Rightarrow \vec{J} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} (-\hat{u}_z)$. Luego la corriente encerrada en esta región es:

$$I_{enc3} = I - \iint_S \vec{J} d\vec{A} = I - \int_b^r \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} (2\pi r dr) = I - \frac{2I}{c^2 - b^2} \int_b^r r dr$$

$$\Rightarrow I_{enc3} = I - \frac{I}{c^2 - b^2} (r^2 - b^2) = I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) = I \left(\frac{c^2 - b^2 - r^2 + b^2}{c^2 - b^2} \right)$$



$$\Rightarrow I_{enc3} = \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) I$$

Luego, por la Ley de Ampère

$$\oint \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc3} \Rightarrow B_3(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) I \Rightarrow \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \hat{u}_\phi$$

Ahora busquemos la energía almacenada en cada región del espacio, para ello tomamos como elementos diferenciales de volumen, conchas cilíndricas de longitud l , radio r y espesor dr , por lo tanto considerando la densidad de energía magnética como $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$, se tiene que la energía almacenada viene dada por:

$$U_{alm} = \int u dV = \int \frac{B^2}{2\mu_0} (2\pi r l dr) \Rightarrow U_{alm} = \int \frac{B^2 \pi r l dr}{\mu_0}$$

Región $r < a$: Para esta región $\vec{B}_1 = \vec{0}$, por lo tanto $\boxed{U_{alm1} = 0}$

Región $a < r < b$: Para esta región se tiene $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$, por lo tanto

$$U_{alm2} = \int \frac{B_2^2 \pi r l dr}{\mu_0} = \int \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \frac{\pi r l dr}{\mu_0} = \int \frac{\mu_0^2 I^2 \pi r l}{4\pi^2 r^2 \mu_0} dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow U_{alm2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{U_{alm2}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos $a = 0,5\text{m}$ $b = 1,0\text{m}$

$$\frac{U_{alm2}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{1}{0,5} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{U_{alm2}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(2)}$$

Región $b < r < c$: Para esta región $\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \hat{u}_\phi$, por lo tanto

$$U_{alm3} = \int \frac{B_3^2 \pi r l dr}{\mu_0} = \int \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \right)^2 \frac{\pi r l dr}{\mu_0} = \frac{\mu_0^2 I^2 \pi l}{4\pi^2 \mu_0 (c^2 - b^2)^2} \int_b^c \frac{(c^2 - r^2)^2 r}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow U_{alm3} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \int_b^c \frac{c^4 - 2c^2 r^2 + r^4}{r} dr$$

$$\Rightarrow U_{alm3} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \left(\int_b^c \frac{c^4}{r} dr - \int_b^c 2c^2 r dr + \int_b^c r^3 dr \right)$$

$$\Rightarrow U_{alm3} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln \left(\frac{c}{b} \right) - c^2 (c^2 - b^2) + \frac{c^4 - b^4}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{alm3}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi (c^2 - b^2)^2} \left(c^4 \ln \left(\frac{c}{b} \right) - c^2 (c^2 - b^2) + \frac{c^4 - b^4}{4} \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos $b = 1,0\text{m}$ $c = 2,0\text{m}$

$$\Rightarrow \frac{U_{alm3}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi (2^2 - 1^2)^2} \left(2^4 \ln \left(\frac{2}{1} \right) - 2^2 (2^2 - 1^2) + \frac{2^4 - 1^4}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{U_{alm_3}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(9)} \left(16 \ln(2) - 4(3) + \frac{15}{4} \right) \\ \Rightarrow \frac{U_{alm_3}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{36\pi} \left(16 \ln(2) - 4(3) + \frac{15}{4} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \left(\frac{4}{9} \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{5}{48} \right) \\ \Rightarrow \frac{U_{alm_3}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \left(\frac{4}{9} \ln(2) - \frac{11}{48} \right) \end{aligned}$$

Luego, la energía total almacenada será la suma de las dos energías:

$$\begin{aligned} \frac{U_{alm}}{l} &= \frac{U_{alm_1}}{l} + \frac{U_{alm_2}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(2) + \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \left(\frac{4}{9} \ln(2) - \frac{11}{48} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln(2) \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9} \right) - \frac{11\mu_0 I^2}{48\pi} \\ \frac{U_{alm}}{l} &= \frac{25\mu_0}{36\pi} \ln(2) - \frac{11\mu_0}{48\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{U_{alm}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{25}{9} \ln(2) - \frac{11}{12} \right)} \end{aligned}$$

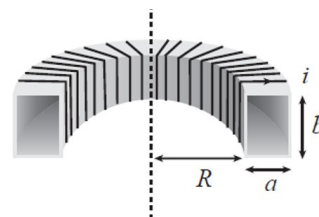
Luego para la inductancia mutua, recordemos que la energía magnética también puede ser calculada mediante $U = \frac{1}{2} L I^2$, por lo tanto si reescribimos convenientemente la energía calculada anteriormente tenemos

$$\frac{U_{alm}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{25}{9} \ln(2) - \frac{11}{12} \right) \Rightarrow \frac{U_{alm}}{l} = \frac{1}{2} I^2 \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{25}{9} \ln(2) - \frac{11}{12} \right)}_{L/H}$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{L}{H} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{25}{9} \ln(2) - \frac{11}{12} \right)}$$

23. Considere un embobinado de N vueltas muy apretadas en forma de toroide hueco con radio interno R y sección rectangular de lados a y b (La figura muestra sólo la mitad del embobinado). Por el embobinado circula una corriente i .



- Calcule el campo magnético del toroide.
- Calcule la energía magnética almacenada en el campo.
- Halle la autoinductancia del toroide.

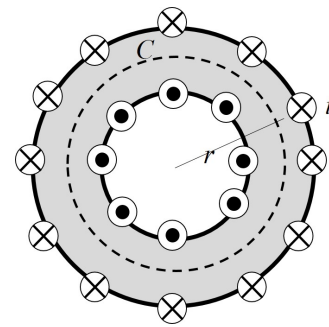
Solución: haciendo un corte transversal al toroide, se observa que debemos tomar una curva amperiana cerrada de radio r , concéntrica al eje de simetría del toroide. Además la dirección del campo magnético será circular en la dirección tangencial ya que esta distribución se interpreta como un solenoide envuelto en si mismo, que al envolverse el campo axial se convierte en una circunferencia, así $\vec{B} = B_\phi \hat{u}_\phi$

Entonces la integral de línea nos queda

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_\phi dl = B_\phi \oint_C dl = B_\phi (2\pi r)$$

Por otro lado, la corriente que encierra la curva C , es la corriente i de cada espira, multiplicada por el número de vueltas, es decir $I_{enc} = Ni$. Finalmente usando la ley de Ampère se obtiene:

$$\oint_C B_\phi dl = \mu_0 I_{enc} \implies B_\phi(2\pi r) = \mu_0 Ni \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$



Para calcular la energía magnética tenemos dos formas de llegar al resultado, una es calculando la inductancia en primer lugar, y otra es por definición usando la integral y la densidad de energía.

Método 1 (inductancia): Calculamos la inductancia del sistema, para ello busquemos el autoflujo sobre rectángulos diferenciales de lados a y dr . Con lo que la integral

$$\Phi_i = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 b Ni}{2\pi} \int_R^{a+R} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N b i}{2\pi} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$$

Este resultado representa el flujo sobre una sola espira, luego el flujo total sobre todo el toroide es: $\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$

Luego

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 b i}{2\pi i} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right) \implies L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$$

Finalmente, la energía magnética será:

$$U = \frac{1}{2} Li^2 \implies U = \frac{\mu_0 N^2 i^2 b}{4\pi} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$$

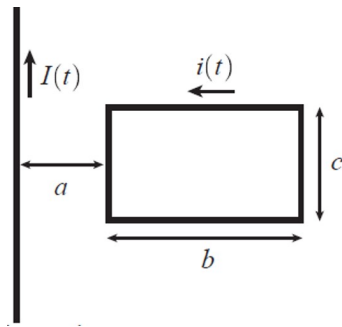
Método 2 (por definición) Debemos considerar un elemento diferencial como una concha cilíndrica de radio r y longitud b , entonces $dV = 2\pi r b dr$, entonces

$$U = \int u dV = \int \frac{B^2}{2\mu_0} (2\pi r b dr) = \frac{\pi b}{\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\right)^2 r dr = \frac{\mu_0 N^2 i^2 b}{4\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r}$$

$$U = \frac{\mu_0 N^2 i^2 b}{4\pi} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$$

Observación: También con el método 2 puede ser obtenida la inductancia comparando con la expresión de energía magnética $U = \frac{1}{2} Li^2$ y escribiendo convenientemente la energía obtenida.

24. En un plano se encuentra una espira rectangular de lados b y c , a una distancia a de un alambre infinito recto que lleva una corriente $I(t)$. La autoinductancia L y la resistencia R de la espira son conocidas. La corriente $I(t)$ en el alambre induce en la espira una corriente en sentido antihorario dada por $i(t) = Dt$, donde D es una constante positiva conocida.



a. Encuentre, en términos de $I(t)$, la fuerza electromotriz inducida en la espira por la corriente del alambre.

b. Halle en términos de i , la f.e.m. inducida en la espira por su propia corriente.

c. Si en $t = 0$, es $I = 0$, calcule $I(t)$ en términos de cantidades conocidas y del tiempo.

Solución: Recordemos que el campo magnético producido por un alambre que transporta una corriente rectilínea viene dado por $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$, en el caso particular de la región por donde se mueve la espira el vector campo eléctrico tendrá la dirección dada por la regla de la mano derecha, es decir $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{k})$.

Como se tiene un campo entrante (dirección $-\hat{k}$) se define como sentido positivo del flujo magnético, el sentido horario. Calculemos el flujo magnético a través de una rectángulo de alto c y anchura diferencial dr :

$$\Phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B c dr = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} c dr = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right)$$

Ahora busquemos la derivada del flujo

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \frac{dI}{dt}$$

Entonces, por la Ley de Faraday, la f.e.m. inducida por la corriente del alambre infinito sobre la espira (que sigue el sentido antihorario por el dato del problema) es:

$$\boxed{\varepsilon_I = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \frac{dI}{dt}}$$

Luego, recordemos que la inductancia viene dada por:

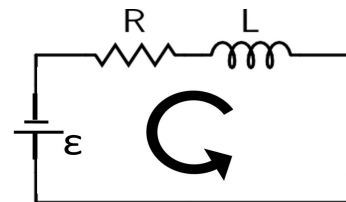
$$L = \frac{\Phi}{i} \Rightarrow \Phi = Li \xrightarrow{\text{derivando}} \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Luego por la Ley de Faraday, la f.e.m. inducida por la corriente propia de la espira es:

$$\boxed{\varepsilon_i = -L \frac{di}{dt}}$$

Luego construimos un circuito RL con corriente directa (alimentado por la f.e.m. ε_I). Tenemos la ecuación de malla:

$$\varepsilon_I - L \frac{di}{dt} - iR = 0 \Rightarrow \varepsilon_I - L \underbrace{\frac{di}{dt}}_{\frac{d}{dt}(Dt)=D} - \underbrace{i}_{i=Dt} R = 0 \Rightarrow \varepsilon_I - LD - DRt = 0$$



$$\frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{dI}{dt} - LD - DRt = 0 \Rightarrow \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{dI}{dt} = LD + DRt$$

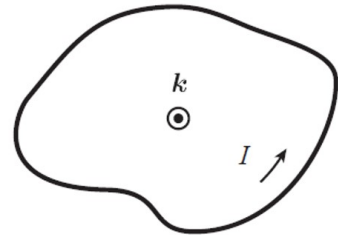
$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{2\pi}{\mu_0 c \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)} (LD + DRt) \Rightarrow \int dI = \frac{2\pi}{\mu_0 c \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)} \int_0^t (LD + DRt) dt$$

Finalmente

$$\Rightarrow I(t) = \frac{2\pi D}{\mu_0 c \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)} \left(Lt + \frac{Rt^2}{2} \right)$$

25. Una espira conductora plana tiene una resistencia de 2Ω , una autoinductancia de 1 H y una superficie circunscrita de 300 cm^2 . La corriente en la espira es cero cuando repentinamente se enciende un campo magnético uniforme perpendicular a la misma. Entonces se observa que la corriente en la espira aumenta en 3 A cada segundo.

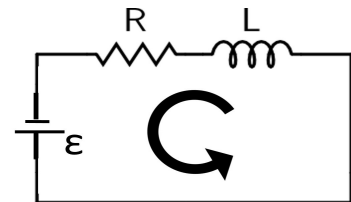
Calcule \mathbf{B} al cabo de 2 segundos.



Solución: Como el campo es uniforme y perpendicular a la superficie, el flujo de este campo será $\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA$, con lo que la derivada será $\frac{d\Phi}{dt} = A \frac{dB}{dt}$, recordando que el campo es una función del tiempo. Por la Ley de Faraday se induce una f.e.m. en sentido antihorario (según figura del problema) $\varepsilon = A \frac{dB}{dt}$.

Construimos un circuito RL de corriente directa (alimentado por la f.e.m. inducida), ya que tanto la inductancia como la resistencia de la espira NO son despreciables. Tenemos ecuación de malla del circuito:

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} - IR = 0$$



Pero recordemos que la tasa de cambio de la corriente es el incremento de 3 A por segundo, es decir $\frac{dI}{dt} = 3$, si integramos ambos lados se obtiene $dI = 3dt \Rightarrow I(t) = 3t + K$, pero como la condición inicial es $I(0) = 0$, entonces $I(t) = 3t$. Sustituimos las funciones obtenidas en la ecuación diferencial.

$$\varepsilon - L \underbrace{\frac{dI}{dt}}_3 - \underbrace{I}_3 R = 0 \Rightarrow \varepsilon - 3L - 3Rt = 0 \Rightarrow \varepsilon = 3L + 3Rt \Rightarrow A \frac{dB}{dt} = 3L + 3Rt$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{3}{A}(Rt + L) \Rightarrow \int_0^t dB = \frac{3}{A} \int_0^t (Rt + L) dt \Rightarrow B(t) = \frac{3}{A} \left(\frac{Rt^2}{2} + Lt \right)$$

Pero para que el campo induzca una corriente en sentido antihorario, este campo debe ser entrante, que establecería el sentido horario como el positivo, y la f.e.m. inducida seguiría el sentido contrario del campo (antihorario). Por lo tanto

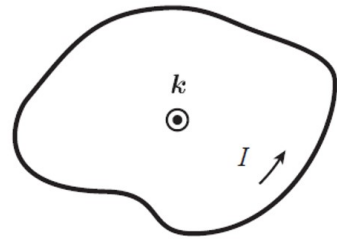
$$\vec{B}(t) = \frac{3}{A} \left(\frac{Rt^2}{2} + Lt \right) (-\hat{k})$$

Sustituimos los valores numéricos $R = 2\Omega$, $L = 1H$, $A = 300 \times 10^{-4}m^2$ y evaluamos en $t = 2s$

$$\vec{B}(2) = \frac{3}{300 \times 10^{-4}} \left(\frac{2(2)^2}{2} + (1)(2) \right) (-\hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{B}(2) = -600\hat{k}}$$

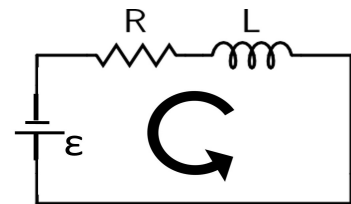
26. La espira conductora plana de la figura tiene resistencia R , autoinductancia L , y circunscribe una superficie S . Perpendicular a la espira existe un campo magnético uniforme que varía con el tiempo y que inicialmente es igual a cero. En el conductor se induce una corriente $I(t) = 4t^2$ A.

Calcule el vector campo magnético en función de t .



Solución: Como el campo es uniforme y perpendicular a la superficie, el flujo de este campo será $\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = BS$, con lo que la derivada será $\frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}$, recordando que el campo es una función del tiempo. Por la Ley de Faraday se induce una f.e.m. en sentido antihorario (según figura del problema) $\varepsilon = S \frac{dB}{dt}$.

Construimos un circuito RL de corriente directa (alimentado por la f.e.m. inducida), ya que tanto la inductancia como la resistencia de la espira NO son despreciables. Tenemos ecuación de malla del circuito:



$$\varepsilon - L \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\frac{d}{dt}(4t^2)=8t} - \underbrace{I}_{4t^2} R = 0 \Rightarrow \varepsilon - 8Lt - 4Rt^2 = 0$$

$$S \frac{dB}{dt} = (8Lt - 4Rt^2) \Rightarrow \int_0^t dB = \frac{1}{S} \int_0^t (8Lt - 4Rt^2) dt \Rightarrow B(t) - B(0) = \frac{1}{S} \left(4Lt^2 - \frac{4}{3}Rt^3 \right)$$

$$\Rightarrow B(t) = \frac{4}{S} \left(Lt^2 - \frac{1}{3}Rt^3 \right)$$

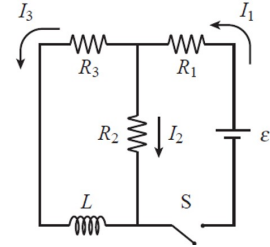
Pero para que el campo induzca una corriente en sentido antihorario, este campo debe ser entrante, que establecería el sentido horario como el positivo, y la f.e.m. inducida seguiría el sentido contrario del campo (antihorario). Por lo tanto

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(t) = \frac{4}{S} \left(Lt^2 - \frac{1}{3}Rt^3 \right) (-\hat{k})}$$

0.4. Circuitos RL y Oscilaciones LC

27. En el circuito de la figura encontrar las corrientes en los siguientes instantes.

- inmediatamente después de cerrar S.
- mucho tiempo después del instante **a**.
- justo después de abrir S, luego del instante **b**.



Solución:

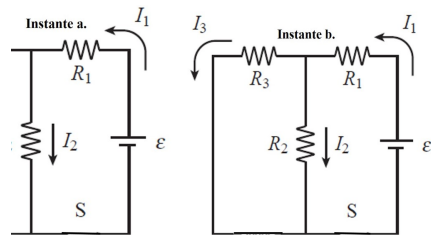
Instante a: Inmediatamente después de cerrar S, sólo circula corriente en la malla de la derecha, ya que la corriente inicial que pasa por el inductor es 0, por lo tanto sólo consideramos la ecuación de la malla de la derecha, donde se cumplirá $I_1 = I_2$

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon - I_1 (R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

Además $I_3 = 0$

Instante b: Mucho tiempo después que se haya cerrado S, la corriente que pasa por el inductor dejará de variar y es equivalente a tener un cable en lugar del inductor. Por lo tanto tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \quad (\text{ecuación de nodo}) \quad \text{(I)} \\ \varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \quad (\text{ecuación de malla derecha}) \quad \text{(II)} \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 &= 0 \quad (\text{ecuación de malla izquierda}) \quad \text{(III)} \end{aligned}$$



Resolvemos el sistema de ecuaciones utilizando diferentes sustituciones y despejes:

De la ecuación (III) obtenemos $I_2 = \frac{I_3 R_3}{R_2}$ (IV). Sustituimos (IV) en (I)

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_3 + I_3 \frac{R_3}{R_2} \Rightarrow I_1 = I_3 \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) \Rightarrow I_1 = \frac{I_3 (R_2 + R_3)}{R_2} \quad \text{(V)}$$

Sustituimos (IV) y (V) en la ecuación (II)

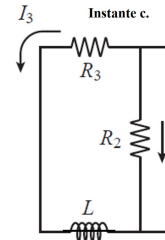
$$\begin{aligned} \varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \Rightarrow \varepsilon - \left(\frac{I_3 (R_2 + R_3)}{R_2} \right) R_1 - \left(\frac{I_3 R_3}{R_2} \right) R_2 = 0 \\ \Rightarrow \varepsilon &= I_3 \left(R_3 + \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_2} \right) \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{R_3 R_2 + R_2 R_1 + R_3 R_1}{R_2} \right) I_3 \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon R_2}{R_3 R_2 + R_2 R_1 + R_3 R_1}$$

Sustituyendo en la ecuación (IV)
$$I_2 = \frac{\varepsilon R_3}{R_3 R_2 + R_2 R_1 + R_3 R_1}$$

Sustituyendo en la ecuación (V)
$$I_1 = \frac{\varepsilon(R_2 + R_3)}{R_3R_2 + R_2R_1 + R_3R_1}$$

Instante c: Justo después de abrir S luego de permanecer mucho tiempo abierto, la malla derecha deja de tener corriente $I_1 = 0$, por lo tanto sólo nos queda la malla izquierda cuya corriente dependerá de la corriente del inductor, que inicialmente es máxima y vale el valor de I_3 calculado anteriormente, además la corriente I_2 fluirá en sentido opuesto al dibujado. Entonces

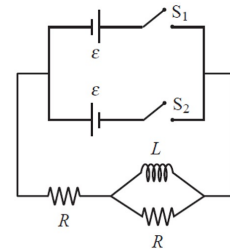


$$I_3 = \frac{\varepsilon R_2}{R_3R_2 + R_2R_1 + R_3R_1}$$

$$I_2 = \frac{-\varepsilon R_2}{R_3R_2 + R_2R_1 + R_3R_1}$$

28. Se cierra el interruptor S_1 , y después de mucho tiempo se abre al mismo tiempo que se cierra el interruptor S_2 . Tome este instante como $t = 0$. Para $t \geq 0$ halle

- la corriente en el inductor.
- los instantes para los cuales la energía en el inductor es la mitad de su valor final.



Solución: Primero debemos hallar la corriente inicial en el inductor, para ello consideramos el circuito en el **Instante 1.** con S_1 cerrado, y como se busca la corriente del inductor, mucho tiempo después que S_1 se haya abierto, el inductor se podrá considerar un cable.

Por lo tanto estamos considerando un circuito donde usamos 2 ecuaciones de malla.

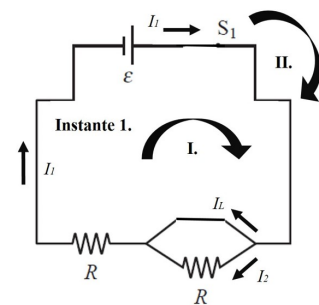
$$\varepsilon - I_1 R = 0 \quad (\text{malla interna I})$$

$$\varepsilon - I_2 R - I_1 R = 0 \quad (\text{malla externa II})$$

Pero notemos que como el inductor pasa a ser un cable, se tiene que $I_1 = I_L$, de la segunda ecuación $I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$, entonces

$I_L = \frac{\varepsilon}{R}$, es decir como condición inicial para $t=0$ (cuando se cierra S_1 y se abre S_2) se

tiene
$$I_L(0) = \frac{\varepsilon}{R} \quad (\text{fluyendo hacia la izquierda})$$



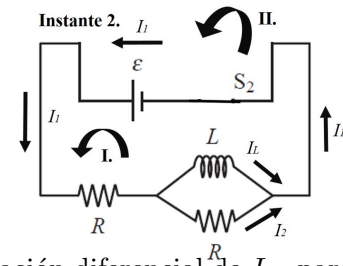
Luego consideremos el **Instante 2.** donde está cerrado S_2 y abierto S_1 para $t \geq 0$. En este caso tenemos 1 ecuación de nodo, y 2 ecuaciones de malla. Pero debemos ser atentos al escoger el sentido de recorrido de la malla, el cual en este caso estamos considerando el sentido hacia donde fluye la f.e.m. ε , con lo que la condición inicial de corriente del inductor se debe modificar y colocar un signo negativo (que indica que fluye en dirección opuesta al dibujado en el instante 2.) Es decir
$$I_L(0) = -\frac{\varepsilon}{R}$$

Entonces, se tienen las ecuaciones

$$I_1 = I_L + I_2 \text{ (ecuación de nodo)}$$

$$\varepsilon - I_1 R - L \frac{dI_L}{dt} = 0 \text{ (malla interna I)}$$

$$\varepsilon - I_1 R - I_2 R = 0 \text{ (malla externa II)}$$



Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar la ecuación diferencial de I_L , para ello debemos combinar las ecuaciones tales que se obtenga una única ecuación donde sólo aparezca I_L , de la ecuación de nodo tenemos $I_L = I_1 - I_2$

$$\begin{cases} \varepsilon - I_1 R - L \dot{I}_L = 0 \\ \varepsilon - I_1 R - I_2 R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon - I_1 R - L \dot{I}_L = 0) \times (-2) \\ \varepsilon - I_1 R - I_2 R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\varepsilon + 2I_1 R + 2L \dot{I}_L = 0 \\ \varepsilon - I_1 R - I_2 R = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$-\varepsilon + I_1 R - I_2 R + 2L \dot{I}_L = 0 \Rightarrow 2L \dot{I}_L + \underbrace{(I_1 - I_2)}_{I_L} R = \varepsilon \Rightarrow \dot{I}_L + \frac{R}{2L} I_L = \frac{\varepsilon}{2L}$$

Tenemos una ecuación diferencial con solución conocida de la forma:

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-t/\tau}$$

donde I_∞ y $1/\tau$ son la condición asintótica y constante de tiempo característico implícitas en la ecuación diferencial, que pueden ser obtenidas reescribiendo la ecuación convenientemente.

$$\dot{I}_L + \underbrace{\frac{R}{2L}}_{1/\tau} I_L = \frac{\varepsilon}{2L} \Rightarrow \dot{I}_L + \frac{R}{2L} I_L = \frac{\varepsilon}{2L} \frac{R}{R} \Rightarrow \dot{I}_L + \frac{R}{2L} I_L = \underbrace{\frac{\varepsilon}{R}}_{I_\infty} \underbrace{\frac{R}{2L}}_{1/\tau}$$

Así se tienen:

$$I_0 = -\frac{\varepsilon}{R} \quad I_\infty = \frac{\varepsilon}{R} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial será

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-t/\tau} \Rightarrow I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R} + \left(-\frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{2L}} \Rightarrow I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}}\right)$$

Ahora busquemos el tiempo para el cual la energía del inductor es la mitad de su valor final, para ello tenemos que la energía final es $U_f = \frac{\varepsilon^2}{2R^2}L$, luego la mitad de esta energía es $U = \frac{\varepsilon^2}{4R^2}L$. Busquemos el valor de la corriente cuando el inductor tiene esta energía, para ello tenemos la igualdad

$$U = \frac{\varepsilon^2}{4R^2}L = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I^2 = \frac{\varepsilon^2}{2R^2} \Rightarrow I = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}R}$$

Luego usando la función de la corriente del inductor en función del tiempo, busquemos cuando alcanza ese valor de corriente cuando es positiva, entonces se tiene:

$$I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}}\right) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}R} = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2e^{-\frac{Rt}{2L}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \ln(e^{-\frac{Rt}{2L}}) = \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \Rightarrow -\frac{Rt}{2L} &= \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \frac{Rt}{2L} = \ln(2) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \right) \\ \frac{Rt}{2L} &= \ln(2(2+\sqrt{2})) \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{2L}{R} \ln(2(2+\sqrt{2}))} \end{aligned}$$

Luego usando la función de la corriente del inductor en función del tiempo, busquemos cuando alcanza ese valor de corriente cuando es negativa, entonces se tiene:

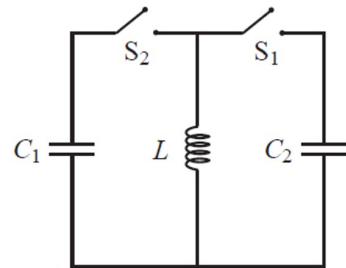
$$\begin{aligned} I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}} \right) \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}R} &= \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}} \right) \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2e^{-\frac{Rt}{2L}} \\ \Rightarrow 2e^{-\frac{Rt}{2L}} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \ln(e^{-\frac{Rt}{2L}}) = \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \Rightarrow -\frac{Rt}{2L} &= \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \frac{Rt}{2L} = \ln(2) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \right) \\ \frac{Rt}{2L} &= \ln(2(2-\sqrt{2})) \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{2L}{R} \ln(2(2-\sqrt{2}))} \end{aligned}$$

29. En el circuito de la figura cada condensador tiene una energía almacenada U y sus placas superiores están cargadas positivamente. $C_1 = C_2 = C$.

El interruptor S_1 se cierra hasta que la energía del condensador C_1 disminuya a $2U/3$ por primera vez. A continuación se cierra el interruptor S_2 al mismo tiempo que abre S_1 . Tomaremos este instante como $t = 0$.

a. Halle la corriente que circula por el inductor en $t = 0$ y señale su sentido.

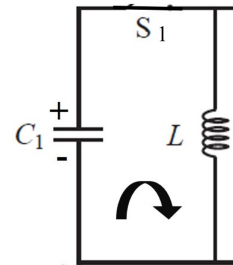
b. Calcule la carga en el condensador C_2 y la corriente en la inductancia L para $t \geq 0$.



Solución: cuando se cierra S_1 estamos considerando solo la malla izquierda del circuito. Se tiene que la energía inicial del sistema para este instante es $U_0 = U = U_C$ que corresponde a la que tiene el capacitor, luego la energía disminuye a $2U/3$, por el principio de conservación de la carga y energía el $U/3$ de energía restante está almacenada en el campo magnético del inductor, por lo tanto la corriente que circula por el inductor cuando tiene esta energía puede ser obtenida mediante la ecuación:

$$\frac{U}{3} = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{2U}{3L} = I^2 \Rightarrow \boxed{I_0 = \sqrt{\frac{2U}{3L}}}$$

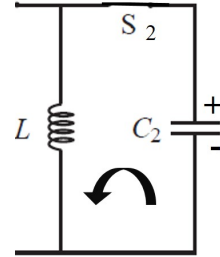
Como es la primera vez que alcanza esta energía, la corriente circula en el sentido horario, ya que la carga del capacitor pasa de la placa positiva a la negativa y la corriente sigue este mismo recorrido en la primera vez.



Luego, se cierra S_2 , al mismo tiempo que se abre S_1 por lo tanto solo consideramos la malla derecha, y ahora como el capacitor tiene una energía almacenada de $U/3$ y el capacitor C_2 tiene una energía almacenada U , la nueva energía total disponible del sistema será $U_{total} = 4U/3$

Para esta malla con el sentido escogido estamos considerando que la corriente es de descarga $I = -\frac{dQ}{dt}$, por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0}$$



Tenemos una ecuación diferencial con solución conocida

$$Q(t) = Q_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \phi)$$

Donde $I_{max} = Q_{max}\omega$ y $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, luego, debemos encontrar la Q_{max} e I_{max} , así como también el ángulo de fase ϕ . Recordemos que la energía total disponible para este circuito es $4U/3$, y además sabemos que el capacitor tiene la carga máxima cuando toda la energía está en el capacitor, por lo tanto

$$\frac{Q_{max}^2}{2C} = \frac{4U}{3} \Rightarrow Q_{max} = \sqrt{\frac{8UC}{3}} \quad I_{max} = \sqrt{\frac{8U}{3L}}$$

Para obtener el ángulo de fase, recurrimos a las condiciones iniciales $t = 0$, donde $I_0 = \sqrt{\frac{2U}{3L}}$, $Q_0 = \sqrt{2UC}$ (obtenida mediante la energía U inicial de C_2)

$$\begin{cases} Q(0) = \sqrt{\frac{8UC}{3}} \cos \phi = \sqrt{2UC} \\ I(0) = \sqrt{\frac{8U}{3L}} \sin \phi = \sqrt{\frac{2U}{3L}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \phi = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

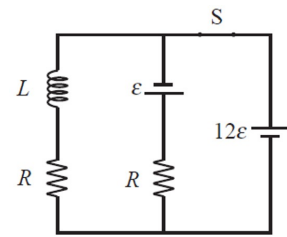
Finalmente

$$\boxed{Q(t) = \sqrt{\frac{8UC}{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{6}\right)} \quad \boxed{I(t) = \sqrt{\frac{8U}{3L}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Observación La derivada de la carga $Q(t)$ resulta positivo porque al establecer la ecuación de malla se considero que la corriente era de descarga $I = -\frac{dQ}{dt}$

30. En el circuito de la figura el interruptor S lleva cerrado un tiempo muy largo. Luego, en un instante que tomaremos como $t = 0$, se abre el interruptor.

- Halle la corriente en el inductor en $t = 0$.
- Calcule la corriente en el inductor para $t \geq 0$.
- Halle los instantes para los cuales la energía en el inductor es la cuarta parte de su valor final.



Solución: Para el instante $t = 0$ se tiene un circuito donde el inductor ha alcanzado la corriente máxima luego de haber sido abierto S, por lo tanto se puede tomar el inductor como si fuera un cable en el circuito, y se resuelven las ecuaciones malla y de nodo:

$$I_1 = I_2 + I_3 \text{ (ecuación de nodo)}$$

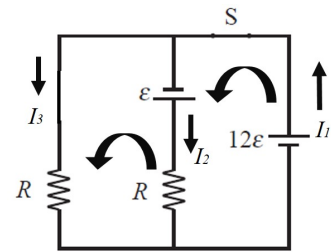
$$12\varepsilon + \varepsilon - I_2 R = 0 \text{ (malla derecha)}$$

$$I_2 R - \varepsilon - I_3 R = 0 \text{ (malla izquierda)}$$

De la segunda ecuación se obtiene $I_2 = \frac{13\varepsilon}{R}$

Sustituyendo en la tercera ecuación se tiene $I_3 = \frac{12\varepsilon}{R}$

Por lo tanto la corriente que pasa por el inductor en $t = 0$ es $I_0 = \frac{12\varepsilon}{R}$ (en sentido antihorario) bajando.



Luego, cuando se abre el interruptor S, deja de circular corriente por la malla derecha, por lo tanto para $t \geq 0$, sólo se considera la malla izquierda, donde la corriente depende del inductor, entonces se tiene ecuación de malla

$$\varepsilon - 2IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{2R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}$$

Tenemos una ecuación diferencial con solución conocida de la forma:

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-t/\tau}$$

Reescribimos la ecuación diferencial para encontrar la constante de tiempo y la condición asintótica

$$\frac{dI}{dt} + \frac{2R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{2R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L} \frac{2R}{2R} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{2R}{L} I = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2R}}_{I_\infty} \underbrace{\frac{2R}{L}}_{1/\tau}$$

Además como el sentido escogido para recorrer la malla, es contrario al que tiene la corriente inicial, debemos colocar un negativo a la corriente inicial $I_0 = -\frac{12\varepsilon}{R}$, entonces nos queda la solución de la ecuación diferencial

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-t/\tau} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{2R} + \left(-\frac{12\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{2R}\right) e^{-\frac{2Rt}{L}} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{25\varepsilon}{2R} e^{-\frac{2Rt}{L}}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{2R} \left(1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \right)$$

Luego, busquemos la corriente cuando ha alcanzado la cuarta parte de su energía final, tenemos que la energía final es: $U_f = \frac{1}{2}L\frac{\varepsilon^2}{4R^2}$, luego tenemos la ecuación:

$$\frac{U}{4} = \frac{1}{8}L\frac{\varepsilon^2}{4R^2} = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I^2 = \frac{\varepsilon^2}{16R^2} \Rightarrow I = \pm \frac{\varepsilon}{4R}$$

Ahora utilizando la función del tiempo de la corriente del inductor, busquemos cuándo alcanza el valor positivo de la corriente encontrada. Tenemos

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{2R} \left(1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{\varepsilon}{2R} \left(1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \Rightarrow 25e^{-\frac{2Rt}{L}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2Rt}{L}} = \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{2Rt}{L} = -\ln\left(\frac{1}{50}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{L}{2R} \ln(50)$$

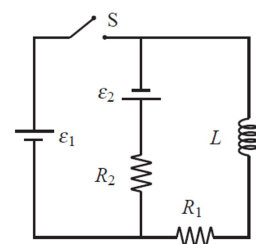
Ahora utilizando la función del tiempo de la corriente del inductor, busquemos cuándo alcanza el valor negativo de la corriente encontrada. Tenemos

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{2R} \left(1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{4R} = \frac{\varepsilon}{2R} \left(1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \right) \Rightarrow -\frac{1}{2} = 1 - 25e^{-\frac{2Rt}{L}} \Rightarrow 25e^{-\frac{2Rt}{L}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2Rt}{L}} = \frac{3}{50} \Rightarrow \frac{2Rt}{L} = -\ln\left(\frac{3}{50}\right) \Rightarrow t_2 = \frac{L}{2R} \ln\left(\frac{50}{3}\right)$$

31. El circuito de la figura lleva funcionando un tiempo muy largo. Luego, en un instante que tomaremos como $t = 0$ se cierra el interruptor S. Tome $\varepsilon_1 = 12$ volt, $\varepsilon_2 = 6$ volt, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$ y $L = 0,1H$.

- Halle la corriente en el inductor justo antes de cerrar S.
- Calcule las corrientes en las resistencias para $t > 0$.
- Determine los tiempos ($t > 0$) para los cuales la energía en el inductor es la centésima parte de su valor final.



Solución: Justo antes de cerrar S, sólo circula corriente por la malla derecha y el inductor está en la condición asintótica, por lo tanto se puede tomar como un cable, entonces la ecuación de malla es (tomando el sentido antihorario de flujo de la batería):

$$\varepsilon_2 - I_0R_2 - I_0R_1 = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_2}{R_2 + R_1}$$

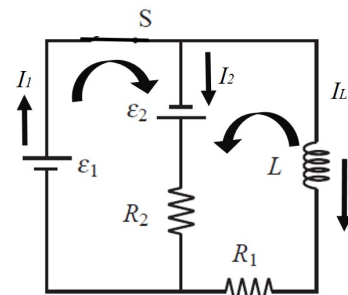
Sustituyendo los valores numéricos $\varepsilon_2 = 6$ volt, $R_2 = 1\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, se obtiene $I_0 = 2$ A, ésta corriente tiene sentido antihorario.

Luego de que se cierra S, se tiene un circuito con dos mallas, y las ecuaciones del circuito serán:

$$I_1 = I_2 + I_L \text{ (ecuación de nodo)}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0 \text{ (malla izquierda)}$$

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 + I_L R_1 + L \frac{dI_L}{dt} = 0 \text{ (malla derecha)}$$



De la segunda ecuación se obtiene $I_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_2}$, sustituyendo los valores numéricos de $\varepsilon_1 = 12$ volt, $\varepsilon_2 = 6$ volt, $R_2 = 1\Omega$, obtenemos $I_2 = 18\text{A}$ (bajando)

Luego, sustituyendo el valor de I_2 obtenido en la ecuación de la malla derecha tenemos:

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 + I_L R_1 + L \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow 6 - 18 + 2I_L + \frac{1}{10} \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} + 20I_L = 120$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \underbrace{20}_{1/\tau} I = \underbrace{6}_{I_\infty} \underbrace{1}_{1/\tau} \quad (20)$$

Con la solución conocida $I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-1/\tau}$ y tomando la condición inicial $I_0 = -2$ A, con el signo negativo, pues tiene sentido opuesto al dibujado para el segundo circuito. Se tiene la solución de la ecuación diferencial:

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-1/\tau} \Rightarrow I(t) = 6 + (-2 - 6)e^{-20t} \Rightarrow I(t) = 6 - 8e^{-20t}$$

Busquemos los tiempos en los que el inductor tiene una céntesima de su energía final, para ello tenemos que la energía final es $U_f = \frac{1}{2}LI_\infty^2 \Rightarrow U_f = \frac{(36)L}{2} \Rightarrow U_f = 18L$

Busquemos la corriente cuando la energía es la cenésima parte de la final

$$\frac{U_f}{100} = \frac{1}{100}18L = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{18}{50} = I^2 \Rightarrow I^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow I = \pm \frac{3}{5}A$$

Luego usamos la función de la corriente del inductor para encontrar el instante en que alcanza el valor de corriente positivo

$$I(t) = 6 - 8e^{-20t} = \frac{3}{5} \Rightarrow 8e^{-20t} = 6 - \frac{3}{5} \Rightarrow 8e^{-20t} = \frac{27}{5} = 8e^{-20t} \Rightarrow \frac{27}{40} = e^{-20t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{27}{40}\right) = -20t \Rightarrow 20t = -\ln\left(\frac{27}{40}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{40}{27}\right)$$

Luego usamos la función de la corriente del inductor para encontrar el instante en que alcanza el valor de corriente negativo

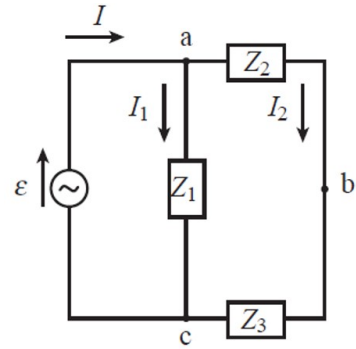
$$I(t) = 6 - 8e^{-20t} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 8e^{-20t} = 6 + \frac{3}{5} \Rightarrow 8e^{-20t} = \frac{33}{5} = 8e^{-20t} \Rightarrow \frac{33}{40} = e^{-20t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{33}{40}\right) = -20t \Rightarrow 20t = -\ln\left(\frac{33}{40}\right) \Rightarrow t_2 = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{40}{33}\right)$$

0.5. Circuitos Corriente Alterna

32. En el circuito de la figura son conocidos las impedancias complejas, Z_1 , Z_2 y Z_3 , el valor pico ε_0 de la fuente y su frecuencia angular ω .

- Halle las corrientes complejas I , I_1 e I_2 .
- Calcule las diferencias de tensión complejas $V_a - V_b$, $V_a - V_c$, $V_b - V_c$.
- Determine la corriente real $I_1(t)$



Solución: Resolvemos el circuito considerando todos los elementos como si fueran resistencias, que en este caso serán las impedancias complejas, y aplicaremos la ley de Ohm compleja $V = ZI$. Por lo tanto tenemos las ecuaciones del circuito

$$I = I_1 + I_2 \text{ (ecuación de nodo)}$$

$$\varepsilon_0 = I_1 Z_1 \text{ (malla izquierda)}$$

$$I_1 Z_1 - (Z_2 + Z_3) I_2 = 0 \text{ (malla derecha)}$$

De la segunda ecuación se obtiene $I_1 = \frac{\varepsilon_0}{Z_1}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación de la malla derecha se tiene:

$$I_1 Z_1 - (Z_2 + Z_3) I_2 = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{Z_1} Z_1 - (Z_2 + Z_3) I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0}{Z_2 + Z_3}$$

Y finalmente con la ecuación de nodo

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{Z_1} + \frac{\varepsilon_0}{Z_2 + Z_3} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_0(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1(Z_2 + Z_3)}$$

Ahora busquemos las diferencias de potencial en los puntos indicados:

Entre los puntos a y b

$$V_a - I_2 Z_2 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = I_2 Z_2 \Rightarrow V_a - V_b = \frac{\varepsilon_0}{Z_2 + Z_3} Z_2 \Rightarrow V_a - V_b = \frac{\varepsilon_0 Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

Entre los puntos a y c

$$V_a - I_1 Z_1 = V_c \Rightarrow V_a - V_c = I_1 Z_1 \Rightarrow V_a - V_c = \varepsilon_0$$

Entre los puntos b y c

$$V_b - I_2 Z_3 = V_c \Rightarrow V_b - V_c = I_2 Z_3 \Rightarrow V_b - V_c = \frac{\varepsilon_0 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

Observación: En las soluciones que aparecen en la guía, consideran que las impedancias son números complejos y como todas las corrientes tienen complejos en el denominador,

se utiliza la conjugada para que quede la parte imaginaria en el numerador, por ejemplo para el caso de I_1 se tiene

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0(Z_1)^*}{Z_1(Z_1)^*} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 Z_1^*}{|Z_1|^2}$$

Este último paso es necesario para poder obtener la corriente real. Por lo tanto para la corriente real $I_1(t)$ se tomará el resultado con la conjugada.

Se conoce que la corriente es de la forma $I_1(t) = I_1 e^{i\omega t}$ donde $I_1(t)$ representa una función a valores reales, para lograr esto, consideremos la formula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ y como la corriente I_1 es un número complejo, tiene una parte real e imaginaria $I_1 = \text{Re}(I_1) + \text{Im}(I_1)i$

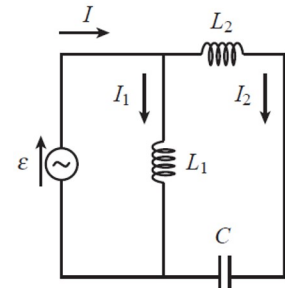
Entonces la corriente real será

$$I_1(t) = I_1 e^{i\omega t} \Rightarrow I_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z_1|^2} \{ \text{Re}(Z_1) \cos(\omega t) + \text{Im}(Z_1) \sin(\omega t) \}$$

d. Para el circuito **d.** determine la corriente compleja y real $I_1(t)$

Solución: Consideramos los elementos como impedancias complejas y aplicamos ley de Ohm compleja. Tenemos la ecuación de la malla izquierda $\varepsilon_0 = I_1 Z_{L_1}$, como $Z_{L_1} = i\omega L_1$ es la impedancia del inductor 1, entonces

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0}{Z_{L_1}} = \frac{\varepsilon_0}{i\omega L_1} = \frac{\varepsilon_0 i}{\omega L_1 i^2} \Rightarrow I_1 = -\frac{\varepsilon_0}{\omega L_1} i$$



Luego para la corriente real consideramos la parte real (que es cero) e imaginaria del número complejo y la fórmula de Euler, por lo tanto

$$I_1(t) = \text{Im}(I_1) \sin(\omega t) \Rightarrow I_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{\omega L_1} \sin(\omega t)$$

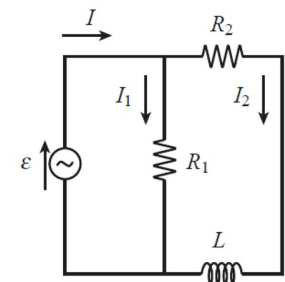
e. Para el circuito **e.** calcule las corrientes reales $I_1(t)$ e $I_2(t)$ y la potencia promedio disipada por R_2 .

Solución: Para la corriente I_1 se tiene la ecuación de la malla izquierda $\varepsilon_0 = I_1 R_1$, entonces $I = \frac{\varepsilon_0}{R_1}$, este número complejo sólo tiene parte real, por lo tanto la corriente real será:

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_1} \cos(\omega t)$$

Luego, tenemos para la malla derecha la ecuación:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 + I_2 \underbrace{Z_L}_{i\omega L} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{R_1} R_1 = I_2 (R_2 + i\omega L) \Rightarrow \varepsilon_0 = I_2 (R_2 + i\omega L) \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0}{R_2 + i\omega L}$$



Multiplicamos por la conjugada

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0(R_2 - \omega Li)}{R_2 + \omega Li(R_2 - \omega Li)} \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0}{R_2^2 + (\omega L)^2}(R_2 - \omega Li)$$

De este número complejo se tiene $\text{Re}(I_2)=R_2$ $\text{Im}(I_2)=\omega L$. Entonces la corriente real será

$$I_2(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_2^2 + (\omega L)^2} \{R_2 \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)\}$$

Luego para la potencia promedio disipada por una resistencia en corriente alterna se tiene la relación $\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi)$, donde V_m representa el voltaje pico que pasa por la resistencia el cual puede ser calculado mediante el módulo del número complejo $V_{R_2} = I_2 R_2$, I_m es el módulo del número complejo I_2 y el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente en una resistencia es cero, por lo tanto $\cos(\phi) = 1$. Busquemos los módulos de los números complejos

$$|I_2| = \frac{\varepsilon_0}{R_2^2 + (\omega L)^2} \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow |I_2| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}$$

además

$$|V_{R_2}| = I_2 R_2 = \frac{\varepsilon_0 R_2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow |V_{R_2}| = \frac{\varepsilon_0 R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}$$

Finalmente la potencia disipada por R_2 será

$$\langle P_{R_2} \rangle = \frac{1}{2} |I_2| |V_{R_2}| = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \frac{\varepsilon_0 R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow \langle P_{R_2} \rangle = \frac{\varepsilon_0^2 R_2}{2(R_2^2 + (\omega L)^2)}$$

33. En el circuito de la figura las fuentes tienen fase inicial nula, frecuencia angular ω y sus sentidos y valores pico (ε_1 y ε_2) están indicados. Las impedancias complejas Z_1, Z_2, Z_3 son conocidas

a. Halle las corrientes complejas I_1, I_2, I_3 en términos de $Z_1, Z_2, Z_3, \varepsilon_1$ y ε_2 .

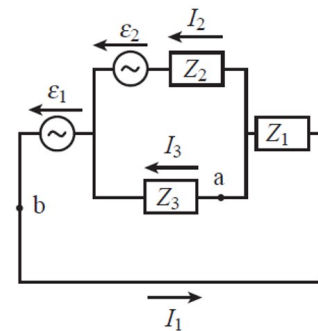
Solución: Busquemos las ecuaciones del circuito, eligiendo dos mallas, una interna recorrida en sentido antihorario, y otra externa que pasa por Z_3 recorrido en el mismo sentido. Entonces se tienen:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \quad (\text{ecuación de nodo}) \\ \varepsilon_2 + I_3 Z_3 - I_2 Z_2 &= 0 \quad (\text{malla interna}) \\ \varepsilon_1 - I_1 Z_1 - I_3 Z_3 &= 0 \quad (\text{malla derecha}) \end{aligned}$$

Sustituimos la ecuación de nodo en la tercera ecuación

$$\varepsilon_1 - I_1 Z_1 - I_3 Z_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 - (I_2 + I_3) Z_1 - I_3 Z_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = Z_1 I_2 + (Z_1 + Z_3) I_3$$

Luego se tiene el sistema de ecuaciones



$$\begin{cases} Z_2 I_2 - Z_3 I_3 = \varepsilon_2 \\ Z_1 I_2 + (Z_1 + Z_3) I_3 = \varepsilon_1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando el método de Cramer y considerando los determinantes asociados al sistema. Tenemos

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_2 & -Z_3 \\ \varepsilon_1 & Z_1 + Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_2 & -Z_3 \\ Z_1 & Z_1 + Z_3 \end{vmatrix}} \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_2(Z_1 + Z_3) + \varepsilon_1 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_2 & \varepsilon_2 \\ Z_1 & \varepsilon_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_2 & -Z_3 \\ Z_1 & Z_1 + Z_3 \end{vmatrix}} \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_1 Z_2 - \varepsilon_2 Z_1}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

Luego con la ecuación de nodo

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 + I_3 &= I_2 = \frac{\varepsilon_2(Z_1 + Z_3) + \varepsilon_1 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} + \frac{\varepsilon_1 Z_2 - \varepsilon_2 Z_1}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \\ &\Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_1(Z_2 + Z_3) + \varepsilon_2 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \end{aligned}$$

b. Solo para esta parte del problema suponga que $\omega = 1000$ rad/s, $\varepsilon_1 = 50$ V, $\varepsilon_2 = 25$ V, el elemento Z_1 es un inductor con $L = 3$ mH, Z_2 es un capacitor con $C = 1$ mF, y Z_3 es una resistencia con $R = 2\Omega$.

b1. Halle la potencia media suministrada por ε_1 .

b2. Halla la diferencia de potencial compleja $V = V_a - V_b$ y la correspondiente diferencia de potencial real $V(t)$ entre los mismos puntos.

Solución: Buscamos el valor numérico de las impedancias complejas $Z_3 = 2$

$$Z_1 = \omega L i = 1000(3 \times 10^{-3}) \Rightarrow Z_1 = 3i$$

$$Z_2 = \frac{1}{\omega C i} = \frac{-i}{1000(1 \times 10^{-3})} \Rightarrow Z_2 = -i$$

Sustituimos en las corrientes complejas los valores numéricos conocidos, tenemos para la corriente I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon_1(Z_2 + Z_3) + \varepsilon_2 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = \frac{50(2 - i) + 25(2)}{3i(-i) - 2i + 6i} = \frac{50(3 - i)}{3 + 4i} = \frac{50(3 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &\Rightarrow I_1 = \frac{50(9 - 12i - 3i - 4)}{25} = 2(5 - 15i) \Rightarrow I_1 = 10 - 30i \end{aligned}$$

Para la corriente I_2 tenemos

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2(Z_1 + Z_3) + \varepsilon_1 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = \frac{25(3i + 2) + 100}{3 + 4i} = \frac{(75i + 50 + 100)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{(150 + 75i)(3 - 4i)}{25} = (6 + 3i)(3 - 4i) = 18 - 24i + 9i + 12 \Rightarrow \boxed{I_2 = 30 - 15i}$$

Para la corriente I_3 tenemos

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 Z_2 - \varepsilon_2 Z_1}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = \frac{50(-i) - 25(3i)}{3 + 4i} = \frac{-50i - 75i}{3 + 4i} = \frac{-125i(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{-125i(3 - 4i)}{25} = -5i(3 - 4i) \Rightarrow \boxed{I_3 = -15i - 20}$$

Para buscar la potencia promedio entregada por la fuente ε_1 se tiene la relación en corriente alterna $\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$, donde V_m y I_m representan los valores picos del voltaje y la corriente principal, y ϕ es el desfase entre estas dos cantidades, el cual puede ser hallado calculando la fase del número complejo I_1 , y para la corriente pico se halla el módulo de I_1 .

Tenemos el módulo del complejo

$$|I_1| = \sqrt{10^2 + 30^2} = \sqrt{100 + 900} \Rightarrow |I_1| = 10\sqrt{10}$$

y la fase

$$\tan \phi = \left(\frac{-30}{10} \right) \Rightarrow \phi = \arctan(-3)$$

Entonces la potencia es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} (50) 10\sqrt{10} \cos(\arctan(-3))$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = 250\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} \Rightarrow \boxed{\langle P \rangle = 250 \text{ watts}}$$

Luego tenemos que la diferencia de potencial compleja entre los puntos a y b es:

$$V_a - I_3 Z_3 + \varepsilon_1 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = I_3 Z_3 - \varepsilon_1 \Rightarrow V_a - V_b = (-15i - 20)(2) - 50$$

$$V_a - V_b = -30i - 90 \Rightarrow \boxed{V_a - V_b = -(90 + 30i)}$$

Ahora busquemos el voltaje real como función del tiempo, para ello tenemos dos formas de escribirlo, una que ya hemos utilizado que es considerar la parte real e imaginaria y la fórmula de Euler, con lo que

$$\boxed{V(t) = -90 \cos(\omega t) + 30 \sin(\omega t)}$$

Otra opción es escribir el voltaje en la forma $V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, donde V_m es el voltaje pico, que se obtiene del módulo del número complejo $V_a - V_b$, el cual será

$$|V_a - V_b| = \sqrt{90^2 + 30^2} = \sqrt{8100 + 900} = \sqrt{9000} \Rightarrow |V_a - V_b| = 30\sqrt{10}$$

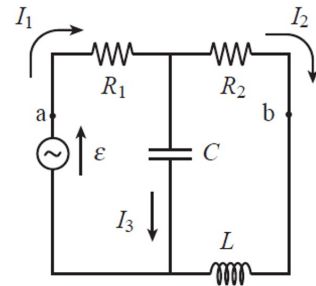
Luego, el ángulo ϕ representa la fase del número complejo $V_a - V_b$, el cual viene dado por $\phi = \arctan\left(\frac{-30}{-90}\right) \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Entonces

$$\boxed{V(t) = 30\sqrt{10} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

34. Para el circuito de la figura calcule

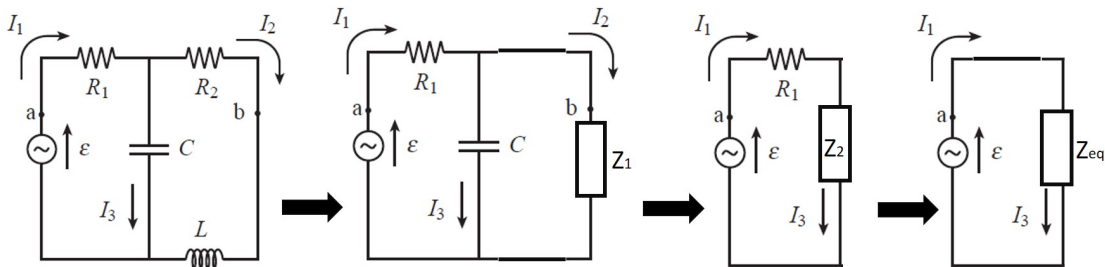
- La impedancia compleja equivalente.
- El valor pico de la diferencia de potencial $V_a - V_b$.
- La potencia media disipada por cada resistencia y la potencia media suministrada por el generador.

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 3\Omega, L = 1\text{mH}, C = 50\mu\text{F}, \varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t), \varepsilon_0 = 50\text{V}, \omega = 4000\text{rad/s}.$$



Solución: Reducimos el circuito para buscar la impedancia equivalente, para ello aplicamos el mismo método de reducción y reglas para resistencias en corriente directa, pero aquí las resistencias serán las impedancias complejas. Tenemos $Z_{R_1} = 10\Omega$, $Z_{R_2} = 3\Omega$, $Z_L = 4i\Omega$, $Z_C = -5i$

Busquemos la impedancia compleja equivalente, para ello trabajamos bajo el siguiente esquema:



Primero, reducimos la conexión en serie entre el inductor y la resistencia R_2 , obteniendo $Z_1 = 3 + 4i$.

Segundo, reducimos la conexión en paralelo entre Z_1 y el capacitor, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} &= \frac{1}{3 + 4i} + \frac{1}{-5i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} + \frac{i}{5} = \frac{3 - 4i}{25} + \frac{i}{5} = \frac{3 - 4i}{25} + \frac{i}{5} = \frac{3}{25} + i \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{25} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{Z_2} &= \frac{3}{25} + \frac{i}{25} \Rightarrow Z_2 = \frac{25}{3 + i} = \frac{25(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} \Rightarrow Z_2 = \frac{25(3 - i)}{10} \Rightarrow Z_2 = \frac{15}{2} - \frac{5}{2}i \end{aligned}$$

Por último reducimos la conexión en serie entre Z_2 y la resistencia R_1 , obteniendo

$$Z_{eq} = Z_2 + Z_{R_1} = \frac{15}{2} - \frac{5}{2}i + 10 = \frac{35}{2} - \frac{5}{2}i \Rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{5}{2}(7 - i)}$$

Como hemos hallado la impedancia compleja equivalente, podemos usar la Ley de Ohm compleja y hallar la corriente principal que sale de la fuente, es decir se tiene

$$\varepsilon_0 = I_1 Z_{eq} \Rightarrow 50 = \frac{5}{2}(7 - i)I_1 \Rightarrow \frac{100}{5(7 - i)} = I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{20(7 + i)}{(7 - i)(7 + i)}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{20(7 + i)}{50} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2}{5}(7 + i)}$$

Luego el módulo de este número complejo es $|I_1| = \frac{2}{5}\sqrt{7^2 + 1^2} \Rightarrow |I_1| = 2\sqrt{2}$

Y la fase del complejo será $\tan \phi = \frac{1}{7} \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

Luego, la potencia promedio entregada por la fuente será:

$$\begin{aligned} \langle P_\varepsilon \rangle &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = \frac{1}{2} (50)(2\sqrt{2}) \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right) = 50\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{7}^2}} \\ &\Rightarrow \langle P_\varepsilon \rangle = 50\sqrt{2} \sqrt{\frac{49}{50}} \Rightarrow \boxed{\langle P_\varepsilon \rangle = 70 \text{ watt}} \end{aligned}$$

Luego, busquemos la corriente I_2 para ello tenemos la ecuación de malla externa recorriendo la malla en sentido horario y obtenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 Z_L &= 0 \Rightarrow 50 - \frac{2}{5}(7+i)(10) = I_2(3+4i) \Rightarrow 50 - 4(7+i) = I_2(3+4i) \\ \Rightarrow 50 - 28 - 4i &= I_2(3+4i) \Rightarrow I_2 = \frac{22-4i}{3+4i} = \frac{(22-4i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{66-88i-12i-16}{25} \\ \Rightarrow I_2 &= \frac{50-100i}{25} \Rightarrow \boxed{I_2 = 2-4i} \end{aligned}$$

Buscamos la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

$$\begin{aligned} V_a - I_1 R_1 - I_2 R_2 &= V_b \Rightarrow V_a - V_b = I_1 R_1 + I_2 R_2 \Rightarrow V_a - V_b = \frac{2}{5}(7+i)(10) + (2-4i)3 \\ \Rightarrow V_a - V_b &= 4(7+i) + 6 - 12i = 28 + 4i + 6 - 12i \Rightarrow V_a - V_b = 34 - 8i \end{aligned}$$

Luego, el módulo de este complejo será el voltaje pico en estos puntos por lo tanto

$$|V_a - V_b| = \sqrt{(34)^2 + (8)^2} = \sqrt{1220} \Rightarrow \boxed{|V_a - V_b| = \sqrt{1220} \text{ Volt} \simeq 34,9 \text{ Volt}}$$

Luego busquemos la potencia disipada por la resistencia R_2 , para ello necesitamos la corriente máxima obtenida del módulo del complejo I_2 , entonces $|I_2| = \sqrt{2^2 + 4^2} \Rightarrow |I_2| = 2\sqrt{5}$, y para el caso de las resistencia el ángulo de fase es 0, puesto que la corriente y el voltaje en las resistencias siempre están en fase.

$$\langle P_{R_2} \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = \frac{1}{2} I_m^2 R_2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{5})^2 (3) \Rightarrow \boxed{\langle P_{R_2} \rangle = 30 \text{ watt}}$$

Finalmente para calcular la potencia disipada por la otra resistencia R_1 tenemos dos alternativas, una que es seguir el mismo procedimiento anterior y calcular el módulo de la corriente compleja I_1 , o la otra utilizar la relación de que la potencia entregada por la fuente es igual al total de potencia disipada por todas las resistencias, es decir

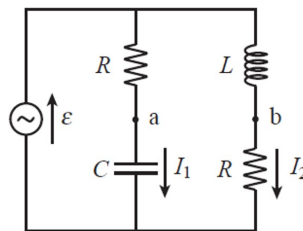
$$\langle P_\varepsilon \rangle = \langle P_{R_1} \rangle + \langle P_{R_2} \rangle \Rightarrow \boxed{\langle P_{R_1} \rangle = 40 \text{ watt}}$$

35. Para el circuito de la figura halle

a. Las corrientes complejas I_1 e I_2 y la impedancia compleja del circuito.

b. La diferencia de potencial real $V(t)$ entre los puntos a y b ($V(t) = V_a - V_b$).

$R = 20\Omega$, $L = 0,2\text{H}$, $C = 0,25\text{mF}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, $\varepsilon_0 = 200\text{V}$, $\omega = 100\text{ rad/s}$.



Solución: Para este circuito se tienen las ecuaciones de malla:

$$\varepsilon_0 = I_1(R + Z_C) \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0}{R + Z_C} \quad (\text{malla izquierda})$$

$$\varepsilon_0 = I_2(Z_L + R) \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0}{R + Z_L} \quad (\text{malla externa})$$

Sustituimos los valores numéricos de las impedancias $R = 20\Omega$, $Z_L = 20i$, $Z_C = -40i$ y el voltaje pico $\varepsilon_0 = 200$ obtenemos para la corriente I_1

$$I_1 = \frac{200}{20 - 40i} = \frac{10(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{10(1 + 2i)}{5} = 2(1 + 2i) \Rightarrow \boxed{I_1 = 2 + 4i}$$

Luego

$$I_2 = \frac{200}{20 + 20i} = \frac{10(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{10(1 - i)}{2} = 5(1 - i) \Rightarrow \boxed{I_2 = 5 - 5i}$$

Para buscar la impedancia compleja del circuito podemos usar la relación de Ohm compleja $\varepsilon_0 = IZ_{eq}$, pero para ello necesitamos hallar la corriente principal, con la ecuación de nodo $I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 7 - i$, entonces tenemos

$$\varepsilon_0 = IZ_{eq} \Rightarrow Z_{eq} = \frac{200}{7 - i} = \frac{200(7 + i)}{(7 - i)(7 + i)} = \frac{200(7 + i)}{50} = 4(7 + i) \Rightarrow \boxed{Z_{eq} = 28 + 4i}$$

Para la diferencia de potencial entre los puntos a y b, tenemos la ecuación:

$$V_a + I_1 R - I_2 Z_L = V_b \Rightarrow V_a - V_b = -(2 + 4i)20 + (5 - 5i)(20i) = 20(-2 - 4i + 5i + 5)$$

$$V_a - V_b = 20(3 + i)$$

Luego el módulo de este número complejo será $|V_a - V_b| = 20\sqrt{3^2 + 1^2} = 20\sqrt{10}$, y la fase $\phi = \arctan(1/3)$. Entonces el voltaje real viene dado por

$$\boxed{V(t) = 20\sqrt{10} \cos(\omega t + \arctan(1/3))}$$

o alternativamente escribimos el número complejo en la forma polar

$$V(t) = \text{Re}(V) \cos(\omega t) + \text{Im}(V) i \sin(\omega t) = 60 \cos(\omega t) + 60i^2 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = 60 \cos(\omega t) - 20 \sin(\omega t)}$$

36. En el circuito **a.** las impedancias complejas Z_1 , Z_2 y Z_3 son conocidas, y también son conocidos el valor pico ε_0 de la fuente y su frecuencia ω .

a. Para el circuito **a.** halle las corrientes complejas I_1 , I_2 e I_3 .

Solución: Tenemos las ecuaciones del circuito

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (\text{ecuación de nodo})$$

$$\varepsilon_0 - I_1 Z_1 - I_2 Z_2 = 0 \quad (\text{malla izquierda interna})$$

$$I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0 \quad (\text{malla interna})$$

Sustituimos la ecuación de nodo en la ecuación de malla izquierda

$$\varepsilon_0 - (I_2 + I_3)Z_1 - I_2 Z_2 = 0 \Rightarrow (Z_1 + Z_2)I_2 + Z_1 I_3 = \varepsilon_0$$

Luego se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} Z_2 I_2 - Z_3 I_3 = 0 \\ (Z_1 + Z_2)I_2 + Z_1 I_3 = \varepsilon_0 \end{cases}$$

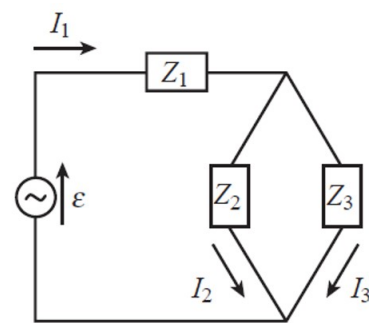
Resolvemos el sistema usando el método de Cramer y considerando los determinantes asociados al sistema. Tenemos

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -Z_3 \\ \varepsilon_0 & Z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_2 & -Z_3 \\ Z_1 + Z_2 & Z_1 \end{vmatrix}} \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_0 Z_3}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_2 & 0 \\ Z_1 + Z_2 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_2 & -Z_3 \\ Z_1 + Z_2 & Z_1 \end{vmatrix}} \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_0 Z_2}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

Luego con la ecuación de nodo obtenemos la corriente principal

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$



circuito **a.**

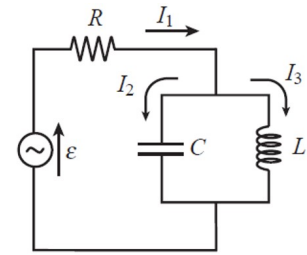
b. Para el circuito b. halle $I_1(t)$ y $V_2(t)$

Solución: Tenemos las ecuaciones del circuito

$$I_1 = I_2 + I_3 \text{ (ecuación de nodo)}$$

$$\varepsilon_0 - I_1 R - I_3 Z_L = 0 \text{ (malla izquierda)}$$

$$I_2 Z_C = I_3 Z_L = 0 \text{ (malla interna)}$$



circuito b.

Sustituimos la ecuación de nodo en la tercera ecuación

$$I_2 Z_C - I_3 Z_L = 0 \Rightarrow (I_1 - I_3) Z_C - I_3 Z_L = 0 \Rightarrow Z_C I_1 - (Z_L + Z_C) I_3 = 0$$

Combinando esta última ecuación con la malla izquierda se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} Z_C I_1 - (Z_L + Z_C) I_3 = 0 \\ R I_1 + Z_L I_3 = \varepsilon_0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando el método de Cramer y considerando los determinantes asociados al sistema. Tenemos

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(Z_L + Z_C) \\ \varepsilon_0 & Z_L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_C & -(Z_L + Z_C) \\ R & Z_L \end{vmatrix}} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (Z_L + Z_C)}{Z_C Z_L + R(Z_L + Z_C)}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_C & 0 \\ R & \varepsilon_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_C & -(Z_L + Z_C) \\ R & Z_L \end{vmatrix}} \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_0 Z_C}{Z_C Z_L + R(Z_L + Z_C)}$$

sustituimos los valores de las impedancias complejas $Z_L = i\omega L$, $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$. Para I_1 se tiene

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0 (Z_L + Z_C)}{Z_C Z_L + R(Z_L + Z_C)} = \frac{\varepsilon_0 \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)}{(i\omega L) \left(\frac{1}{i\omega C} \right) + R \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)} = \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega C} \right)}{\frac{L}{C} + R \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega C} \right)}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 LC)}{\omega L i + R(1 - \omega^2 LC)} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (\omega^2 LC - 1)}{R(\omega^2 LC - 1) - \omega L i}$$

multiplicamos por la conjugada

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (\omega^2 LC - 1) (R(\omega^2 LC - 1) + \omega L i)}{(R(\omega^2 LC - 1) - \omega L i) (R(\omega^2 LC - 1) + \omega L i)}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_0 (\omega^2 LC - 1)}{R^2 (\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2} (R(\omega^2 LC - 1) + \omega L i)$$

donde el módulo de este número complejo es:

$$|I_1| = \frac{\varepsilon_0 (\omega^2 LC - 1)}{R^2 (\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2} \sqrt{R^2 (\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2}$$

$$\Rightarrow |I_1| = \frac{\varepsilon_0(\omega^2 LC - 1)}{\sqrt{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2}}$$

y el ángulo de fase: $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R(\omega^2 LC - 1)}\right)$

Entonces la corriente real viene dada por la función

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon_0(\omega^2 LC - 1)}{\sqrt{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\omega L}{R(\omega^2 LC - 1)}\right)\right)$$

O alternativamente podemos escribir el complejo en su forma polar y obtenemos la función

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon_0(\omega^2 LC - 1)}{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega L)^2} \{R(\omega^2 LC - 1) \cos(\omega t) - L\omega \sin(\omega t)\}$$

Ahora para hallar el voltaje V_2 , tenemos por la conexión en paralelo que tanto el inductor como el capacitor comparten el mismo voltaje, con lo que podemos usar la corriente I_3 ya calculada y usando la relación de Ohm compleja $V_2 = I_3 Z_L$, entonces

$$V_2 = I_3 Z_L = \frac{\varepsilon_0 Z_C}{Z_C Z_L + R(Z_L + Z_C)} Z_L = \frac{\varepsilon_0(i\omega L) \frac{1}{i\omega C}}{(i\omega L)\left(\frac{1}{i\omega C}\right) + R\left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\frac{\varepsilon_0 L}{C}}{\frac{L}{C} + R\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega C}\right)} = \frac{\varepsilon_0 \frac{L}{C}}{\frac{\omega Li + R(1 - \omega^2 LC)}{i\omega C}} = \frac{\varepsilon_0 L\omega i}{\omega Li + R(1 - \omega^2 LC)}$$

multiplicamos por la conjugada

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\varepsilon_0 L\omega i(-\omega Li + R(1 - \omega^2 LC))}{(\omega Li + R(1 - \omega^2 LC))(-\omega Li + R(1 - \omega^2 LC))}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\varepsilon_0 L\omega i}{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} (-\omega Li + R(1 - \omega^2 LC))$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\varepsilon_0 L\omega}{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} (\omega L - R(\omega^2 LC - 1)i)$$

el módulo de este número complejo será:

$$|V_2| = \frac{\varepsilon_0 L\omega}{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} \sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}$$

$$|V_2| = \frac{\varepsilon_0 L\omega}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}}$$

y la fase del complejo será $\phi = \arctan\left(\frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\omega L}\right)$

Entonces el voltaje real V_2 será

$$V_2(t) = \frac{\varepsilon_0 L \omega}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\omega L}\right)\right)$$

Escrito en forma polar

$$V_2(t) = \frac{\varepsilon_0 L \omega}{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} \{\omega L \cos(\omega t) + R(\omega^2 LC - 1) \sin(\omega t)\}$$

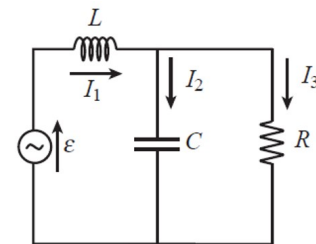
c. Para el circuito c. halle la potencia promedio disipada por la resistencia.

Solución: Tenemos las ecuaciones del circuito:

$$I_1 = I_2 + I_3 \text{ (ecuación de nodo)}$$

$$\varepsilon_0 - I_1 Z_L - I_3 R = 0 \text{ (malla externa)}$$

$$I_2 Z_C - I_3 R = 0 \text{ (malla interna)}$$



circuito c.

Como estamos interesado en conocer la corriente y el voltaje que pasa por la resistencia, manipulamos las ecuaciones para obtener la corriente I_3 . Sustituimos la ecuación de nodo en la segunda ecuación

$$\varepsilon_0 - (I_2 + I_3)Z_L - I_3 R = 0 \Rightarrow Z_L I_2 + (Z_L + R)I_3 = \varepsilon_0$$

Combinando está ultima ecuación con la malla interna se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} Z_C I_2 - R I_3 = 0 \\ Z_L I_2 + (Z_L + R) I_3 = \varepsilon_0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando el método de Cramer y considerando los determinantes asociados al sistema. Tenemos

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_C & 0 \\ Z_L & \varepsilon_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_C & -R \\ Z_L & Z_L + R \end{vmatrix}} \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_0 Z_C}{Z_C Z_L + R(Z_L + Z_C)}$$

Sustituimos las impedancias complejas en la ecuación

$$I_3 = \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{i\omega C}}{(i\omega L)\left(\frac{1}{i\omega C}\right) + R\left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)} = \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{i\omega C}}{\frac{\omega Li + R(1 - \omega^2 LC)}{i\omega C}} = \frac{\varepsilon_0}{\omega Li + R(1 - \omega^2 LC)}$$

multiplicamos por la conjugada

$$I_3 = \frac{\varepsilon_0 (R(1 - \omega^2 LC) - \omega Li)}{(R(1 - \omega^2 LC) + \omega Li)(R(1 - \omega^2 LC) - \omega Li)}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_0}{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2} (R(1 - \omega^2 LC) - \omega Li)$$

el módulo de este número complejo vendrá dado por

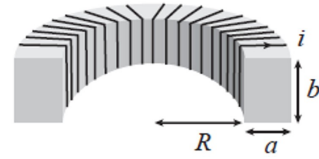
$$|I_3| = \frac{\varepsilon_0}{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2} \sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}}$$

Luego, la potencia promedio que disipa la resistencia vendrá dada por la relación

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} |I_3|^2 R \Rightarrow \langle P_R \rangle = \frac{\varepsilon_0^2 R}{2((\omega L)^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2)}$$

0.6. Magnetización y materiales magnéticos

37. Se tiene un embobinado de N vueltas muy apretadas en forma de toroide con radio interno R y sección rectangular de lados a y b . El interior del toroide está lleno de una sustancia con permeabilidad μ . Por el embobinado circula una corriente i .



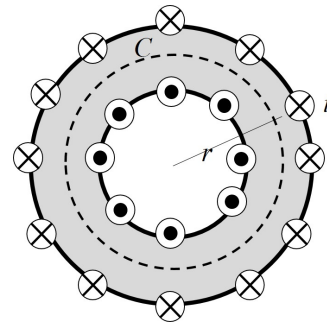
a. Calcule los vectores de intensidad de campo magnético \vec{H} , inducción magnética \vec{B} y magnetización \vec{M} dentro del toroide.

b. Calcule como está distribuida y cuánto vale la corriente ligada en el interior del toroide.

Solución: haciendo un corte transversal al toroide, se observa que debemos tomar una curva amperiana cerrada de radio r , concéntrica al eje de simetría del toroide. Además la dirección del vector \vec{H} será circular en la dirección tangencial ya que esta distribución se interpreta como un solenoide envuelto en si mismo, que al envolverse el campo axial se convierte en una circunferencia, así $\vec{H} = H_\phi \hat{u}_\phi$

Entonces la integral de línea nos queda

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H_\phi dl = H_\phi \oint_C dl = H_\phi(2\pi r)$$



Luego usando la Ley de Ampère para el vector intensidad de campo

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} \Rightarrow H_\phi(2\pi r) = Ni \Rightarrow \vec{H} = \frac{Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Luego, para el vector inducción magnética se tiene la relación

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ entonces } \vec{B} = \frac{\mu Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Luego, para el vector magnetización usamos la relación $\vec{M} = \chi \vec{H}$, donde χ es la susceptibilidad magnética que no está dada en el problema, pero puede ser obtenida mediante la relación $\mu = \mu_0(1 + \chi)$, entonces $\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$, por lo tanto

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) \frac{Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Para encontrar la distribución superficial de la corriente ligada en el toroide debemos considerar las 4 superficies que envuelven al toroide.

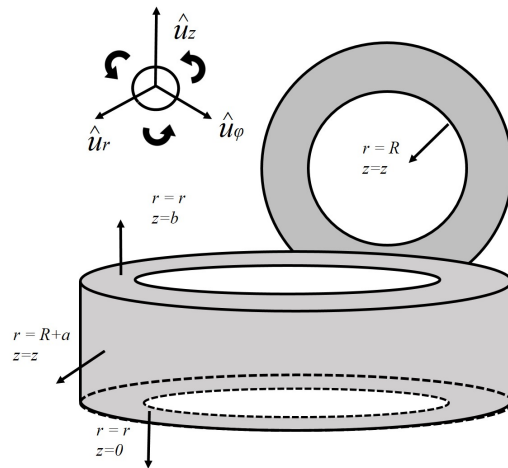
1. Cara superior $z = b$, y $r = r$
2. Cara inferior $z = 0$, y $r = r$
3. Aro interno $r = R$, y $z = z$
4. Aro externo $r = R + a$, y $z = z$

La densidad de corriente superficial viene dada por $\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}$, donde M es el vector de magnetización evaluado en la superficie donde se esta buscando la densidad, y \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie.

Considerando el sistema de referencia planteado en la figura, buscamos la distribución de la corriente en las 4 superficies del toroide.

Superficie 1. Para la cara superior tenemos $r = r$ y la altura $z = b$, $\vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$. un vector normal a esta superficie que apunte hacia el exterior del toroide es $\hat{n} = +\hat{u}_z$, por lo tanto

$$\vec{K}_1 = \vec{M} \times \hat{n} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} (\hat{u}_\phi \times (+\hat{u}_z)) \Rightarrow \vec{K}_1 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} (+\hat{u}_r)$$



Superficie 2. Para la cara inferior tenemos $r = r$ y la altura $z = 0$, $\vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi$. un vector normal a esta superficie que apunte hacia el exterior del toroide es $\hat{n} = -\hat{u}_z$, por lo tanto

$$\vec{K}_2 = \vec{M} \times \hat{n} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} (\hat{u}_\phi \times (-\hat{u}_z)) \Rightarrow \vec{K}_2 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} (-\hat{u}_r)$$

Superficie 3. Para el aro interno tenemos $r = R$ y la altura $z = z$, $\vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi R} \hat{u}_\phi$. un vector normal a esta superficie que apunte hacia el exterior del toroide es $\hat{n} = -\hat{u}_r$, por lo tanto

$$\vec{K}_3 = \vec{M} \times \hat{n} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi R} (\hat{u}_\phi \times (-\hat{u}_r)) \Rightarrow \vec{K}_3 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi R} (+\hat{u}_z)$$

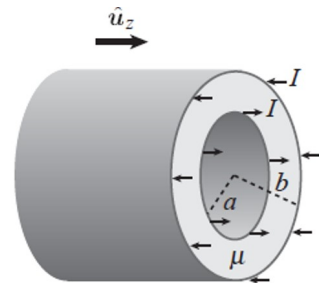
Superficie 4. Para el aro externo tenemos $r = R + a$ y la altura $z = z$, $\vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi(R+a)} \hat{u}_\phi$. un vector normal a esta superficie que apunte hacia el exterior del toroide es $\hat{n} = +\hat{u}_r$, por lo tanto

$$\vec{K}_4 = \vec{M} \times \hat{n} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi(R+a)} (\hat{u}_\phi \times (+\hat{u}_r)) \Rightarrow \vec{K}_4 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi(R+a)} (-\hat{u}_z)$$

Finalmente la corriente ligada puede ser calculada mediante la integral de línea del vector magnetización y considerando una curva que cerrada de radio r

$$I_L = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{Ni}{2\pi r} (2\pi r) \Rightarrow I_L = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) Ni$$

38. En la figura se muestra la sección de un cable coaxial compuesto por dos conductores cilíndricos muy delgados de radios a y b , de longitud infinita, por los cuales circula una corriente I . El espacio entre los conductores está lleno con una sustancia magnética de permeabilidad μ .



Halle los vectores \vec{H} , \vec{B} , \vec{M} y la corriente ligada, en la región $a \leq r \leq b$.

Solución: Como tenemos un cilindro con corriente axial, por simetría este generará un campo en dirección tangencial $\vec{H} = H\hat{u}_\phi$, con lo que debemos tomar una curva cerrada de radio r , esta curva encerrará sólo la corriente superficial del conductor interno de radio a , puesto que los cilindros son muy delgados y sus espesores son despreciables con lo que la corriente se distribuye en la superficie de los cilindros. Es decir $I_{enc} = I$, entonces

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(2\pi r) = I \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi}$$

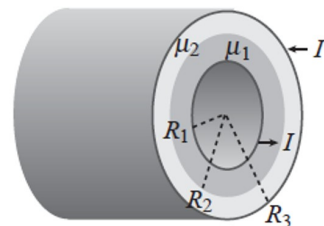
Luego obtenemos los otros vectores magnéticos, considerando que $\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{u}_\phi} \quad \vec{M} = \chi\vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi}$$

Finalmente para la corriente ligada buscamos la circulación del vector magnetización \vec{M} a través de una curva circular de radio r

$$I_L = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) \frac{I}{2\pi r} (2\pi r) \Rightarrow \boxed{I_L = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) I}$$

39. Un cable coaxial está formado por dos cilindros muy delgados conductores de radios R_1 y R_3 . El espacio comprendido entre los dos conductores está relleno por dos sustancias magnéticas de permeabilidad μ_1 y μ_2 , con superficie de separación de R_2 .



Halle los vectores \vec{H} , \vec{B} y \vec{M} en $R_1 < r < R_3$ y la corriente ligada en $r = R_2$

Solución: Para esta distribución tenemos el mismo vector intensidad de campo, debido a que las corrientes que pasan por los conductores, son corrientes superficiales ya que los cilindros son de espesor despreciable. Por lo tanto la corriente axial, genera un campo en dirección tangencial.

$$\text{Entonces } \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi}$$

Luego para el vector inducción magnética se tiene la relación $\vec{B} = \mu\vec{H}$, pero al tener dos materiales magnéticos en el espacio entre los conductores, se distinguen dos regiones donde cambia este vector. Por lo tanto

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

Consideramos que $\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ e igualmente se distinguen dos regiones para el vector magnetización

$$\vec{M} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \right) \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \left(\frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \right) \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

Luego identificamos que en la superficie de radio R_2 se tienen dos corrientes ligadas, una externa a la superficie y otra interna, producto de que se tiene en esta superficie la frontera entre los dos materiales magnéticos, por lo tanto debemos calcular la circulación de los dos vectores magnetización para encontrar las corrientes ligadas, y tomamos en consideración que estas corrientes se oponen al sentido de las corrientes físicas que ya tienen los conductores.

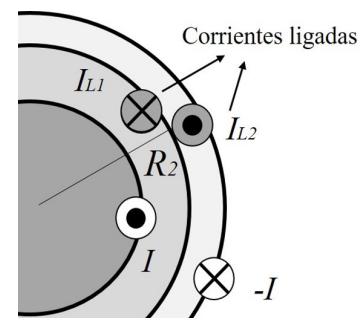
Entonces se tienen

I_{L_1} es la circulación del vector M_1 , es decir se esta encontrando la corriente ligada en la capa interna de la superficie

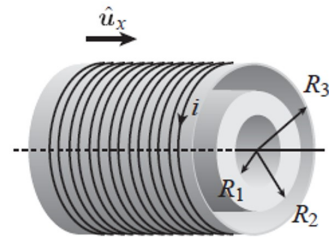
$$I_{L_1} = - \oint_C \vec{M}_1 \cdot d\vec{l} = - \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \right) \frac{I}{2\pi r} (2\pi r) \Rightarrow I_{L_1} = - \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \right) I$$

I_{L_2} es la circulación del vector M_2 , es decir se esta encontrando la corriente ligada en la capa externa de la superficie

$$I_{L_2} = \oint_C \vec{M}_2 \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \right) \frac{I}{2\pi r} (2\pi r) \Rightarrow I_{L_2} = \left(\frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \right) I$$



40. Un solenoide recto infinito tiene radio R_3 y n vueltas por unidad de longitud. Por el alambre enrollado circula una corriente i . En el interior del solenoide y coaxial con éste, se encuentra un cilindro de radios R_1 y R_2 , de un material con permeabilidad magnética μ .



a. Halle los campos \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} en todos los puntos del espacio.

b. Halle el valor y distribución de las corrientes ligadas. Haga un dibujo.

Solución: Como tenemos un solenoide con una distribución de corriente circular, este generará un campo en dirección axial $\vec{H} = H\hat{u}_x$, por lo tanto debemos considerar un rectángulo de lado l como la curva amperiana a utilizar en la ley de Ampère, entonces se tiene

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} \Rightarrow H(l) = nIl \Rightarrow \vec{H} = nI\hat{u}_x$$

Este resultado del vector intensidad de campo \vec{H} es válido para todos los puntos interiores al solenoide. Es decir $\vec{H} = nI\hat{u}_x$ para $r < R_3$.

Luego para el vector inducción magnética \vec{B} , se distinguen tres regiones del espacio interior del solenoide, para $r < R_1$ donde no existe material magnético, por lo tanto es el vacío μ_0 , para $R_1 < r < R_2$ donde existe un material magnético con permeabilidad μ , y finalmente $R_2 < r < R_3$ donde nuevamente tenemos el vacío. Entonces el vector \vec{B} se define como sigue:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{u}_x & \text{si } r < R_1 \\ \mu n I \hat{u}_x & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \mu_0 n I \hat{u}_x & \text{si } R_2 < r < R_3 \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$

Luego el vector magnetización \vec{M} sólo estará presente en la región donde exista el material magnético, para ello consideremos que $\vec{M} = \chi \vec{H}$, donde $\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$, entonces

$$\vec{M} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1 \\ \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) n I \hat{u}_x & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } R_2 < r < R_3 \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$

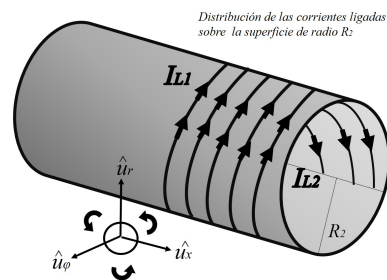
La corriente ligada se distribuirá en las superficies adyacentes a la región donde está presente el vector magnetización, es decir se inducirá una corriente en la superficie interna de radio R_1 y la superficie externa de radio R_2 . Las corrientes ligadas se deben oponer al flujo de la corriente física, para ello tomaremos como referencia la superficie más próxima a la corriente física, que en este caso es la superficie externa R_2 , como en nuestro sistema de referencia la corriente física sigue la dirección tangencial positiva, la inducida en R_2 externa debe ser tangencial negativa, es decir

$$\vec{K}_1 = \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times (-\hat{u}_r) \Rightarrow \vec{K}_1 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right) n I (-\hat{u}_\phi)$$

Luego la corriente ligada en la superficie externa de radio R_2 , considerando que el solenoide tiene una longitud L será:

$$I_{L_1} = - \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = - \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) nI(L)$$

$$\Rightarrow I_{L_1} = - \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) nLI$$



Finalmente para la superficie interna de radio R_2 se tiene el mismo valor de la corriente pero en sentido opuesto

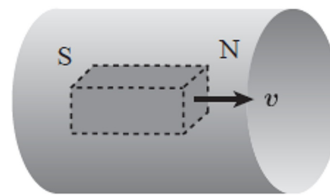
$$I_{L_2} = -I_{L_1} \Rightarrow I_{L_2} = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) nLI$$

Igualmente la distribución de la corriente será la opuesta a la calculada anteriormente. Entonces para la superficie interna de radio R_2

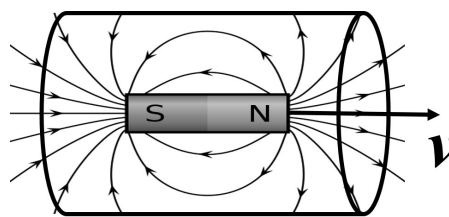
$$\vec{K}_2 = -\vec{K}_1 \Rightarrow \vec{K}_2 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) nI(\hat{u}_\phi)$$

41. Se lanza un imán con velocidad v por un largo tubo horizontal de cobre. Desprecie la resistencia del aire y de las paredes

- Dibuje las líneas de campo magnético del imán.
- ¿Se forman corrientes de Foucault?
- ¿Qué sucede con la energía cinética del imán? ¿Aumenta o disminuye? ¿De dónde proviene o a dónde va la energía que gana o pierde el imán?



Solución: Como el imán se está moviendo con una velocidad constante, quiere decir que la posición del mismo está cambiando a una tasa de cambio no nula, es decir $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Como se ha visto anteriormente en los problemas de inducción, el hecho de cambiar la posición produce que el flujo magnético dentro del tubo conductor sea una función del tiempo, por lo tanto por la Ley de Faraday un campo magnético que varía en el tiempo produce una corriente inducida, que según la Ley de Lenz está tendrá sentido opuesto a la dirección de crecimiento del campo, es decir las corrientes que se inducen en el conductor pasan a contrarrestar el movimiento del imán y se convierten en corrientes parásitas (Foucault).



Estas corrientes hacen que el imán que inicialmente tenía una velocidad v pase a disminuir progresivamente su energía cinética al existir pequeñas fuerzas que producen las corrientes inducidas (parásitas) sobre el imán. Como se supone que no hay pérdida de energía en el sistema, esta energía perdida por el imán se transfiere a las paredes del conductor y es almacenada en formas de campos magnéticos que producen las corrientes parásitas.

0.7. Ondas electromagnéticas

42. Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío en dirección z negativo. La onda de campo eléctrico en el origen es

$$\vec{E} = -2 * 10^8 \hat{u}_x \cos(\pi * 10^6 t \text{ rad/s}) \text{ V/m}$$

- Halle la longitud de onda λ y la frecuencia ν .
- Halle las ondas de campo eléctrico y magnético y determine el valor medio del vector de Poynting.

Solución: Recordemos las expresiones generales de las soluciones de la ecuación de onda para el campo magnético y eléctrico

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Si comparamos el campo eléctrico en el origen $\vec{r} = \vec{0}$ observamos que

$$\vec{E}(\vec{r} = 0) = -2 * 10^8 \hat{u}_x \cos(\pi * 10^6 t) = \vec{E}_{max} \cos(-\omega t)$$

Considerando que ω es una constante positiva, y tomando la propiedad de paridad de la función coseno $\cos(-x) = \cos(x)$ se tienen la ecuación

$$-2 * 10^8 \hat{u}_x \cos(\pi * 10^6 t) = \vec{E}_{max} \cos(-\omega t) \Rightarrow \vec{E}_{max} \cos(\omega t) = -2 * 10^8 \hat{u}_x \cos(\pi * 10^6 t)$$

donde se deduce que $\vec{E} = -2 * 10^8 \hat{u}_x$ y $\omega = \pi * 10^6 \text{ rad/s}$.

$$\text{Luego tenemos que la frecuencia } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi * 10^6}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\nu = 5 * 10^5 \text{ s}}$$

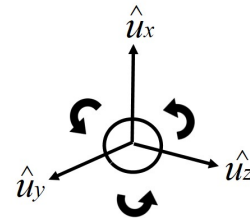
Para la longitud de onda se conoce la relación $\lambda = \frac{c}{\nu}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, entonces $\lambda = \frac{3 * 10^8}{5 * 10^5} \Rightarrow \boxed{\lambda = 600 \text{ m}}$

Luego, el vector número de onda tendrá sólo dirección \hat{u}_z ya que es dato del problema que la onda se propaga en esta dirección, el módulo de este vector puede ser obtenido mediante la relación con la frecuencia angular $|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi * 10^6}{3 * 10^8} \Rightarrow |k| = \frac{\pi}{300}$, entonces $\vec{k} = \frac{\pi}{300} \hat{u}_z$.

Por lo tanto tenemos todos los valores de los vectores y constantes para completar la ecuación del campo eléctrico, y tomamos $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$.

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -2 * 10^8 \hat{u}_x \cos\left(\frac{\pi}{300} z - \pi * 10^6 t\right)}$$

Recordemos que los tres vectores que definen la onda son perpendiculares entre sí, por lo tanto para encontrar la dirección del campo magnético basta con considerar el producto vectorial entre las direcciones de \vec{k} y \vec{E} , es decir $\hat{n}_B = \hat{u}_z \times (-\hat{u}_x) = -(\hat{u}_y)$, y usando la relación $\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$ o la relación entre los módulos $|\vec{E}_{max}| = c|\vec{B}_{max}|$ buscamos el campo magnético.



Tenemos el módulo $|\vec{B}_{max}| = \frac{|\vec{E}_{max}|}{c} = \frac{2 * 10^8}{3 * 10^8} \Rightarrow |\vec{B}_{max}| = \frac{2}{3}$
Entonces el campo magnético será:

$$\vec{B} = \vec{B}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{2}{3} \hat{u}_y \cos\left(\frac{\pi}{300} z - \pi * 10^6 t\right)}$$

Luego, el valor medio del vector de Poyntig (el cual va en la dirección de propagación de la onda \hat{u}_z) viene dado por

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E^2}{2\mu_0 c} \hat{u}_z = \frac{(2 * 10^8)^2}{4\pi * 10^{-7} (3 * 10^8)} \hat{u}_z \Rightarrow \boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{10^{15}}{3\pi} \hat{u}_z}$$

43. Una onda electromagnética plana, polarizada linealmente y de frecuencia angular ω

se propaga en un medio de índice de refracción $\eta = 3/2$ en dirección dada por el vector $\vec{A} = 3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z$. El vector campo eléctrico está en el plano yz y su módulo máximo es E . En $t = 0$ la componente z del campo eléctrico toma su valor máximo y positivo en el origen.

- Calcule la velocidad de la onda, la longitud de la onda y el vector número de onda.
- Halle los vectores campo eléctrico y magnético de la onda.
- Halle el vector de Poyntig y su valor medio.

Solución: Primero debemos definir el vector unitario que orienta la dirección de la onda, para ello hallamos el unitario de A , es decir $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \hat{A} = \frac{3}{5}\hat{u}_y + \frac{4}{5}\hat{u}_z$. Este vector será el director del vector número de onda, el vector velocidad y el vector de Poyntig ya que los tres siguen la dirección de propagación.

Para la velocidad se tiene la relación $|\vec{v}| = \frac{c}{\eta} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{2c}{3}$. Luego, el vector velocidad se define como $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{A} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{2}{5}\hat{u}_y + \frac{8}{15}\hat{u}_z}$

Luego para la longitud de onda se usa la relación $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\frac{2}{3}c(2\pi)}{\omega} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{4\pi c}{3\omega}}$

El módulo del vector número de onda viene dado por $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\frac{2c}{3}} \Rightarrow |\vec{k}| = \frac{3\omega}{2c}$.

Entonces $\vec{k} = \frac{3\omega}{2c} \left(\frac{3}{5}\hat{u}_y + \frac{4}{5}\hat{u}_z \right) \Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{3\omega}{10c} (3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z)}$

Estos pasos básicamente es carpintería ya que basta con recordar bien las relaciones entre las constantes y tener bien claro el significado de la dirección de propagación y cómo definir un vector unitario.

Ahora, buscaremos el campo eléctrico de la onda, el cual tiene la dificultad en obtener el vector máximo \vec{E}_{max} con su respectiva dirección, para ello veamos en los datos del problema que el campo está en el plano yz , es decir implica que tiene dos componentes, una en y y otra en z , con lo que el campo es de la forma $\vec{E}_{max} = E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z$

Por otro lado el problema dice que el módulo máximo es E , es decir cómo se definió anteriormente la forma del vector, se tiene

$$|\vec{E}_{max}| = E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \quad (\text{ecuación I})$$

Veamos que hemos obtenido una ecuación con dos incógnitas por lo tanto necesitamos otra relación para deducir el vector \vec{E}_{max} , recordando la propiedad de los vectores de onda, que son perpendiculares entre sí, y conociendo ya el vector número de onda \vec{k} , se puede establecer la condición de que:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E}_{max} = 0 &\Rightarrow \frac{3\omega}{10c}(3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \cdot (E_y \hat{u}_y + E_z \hat{u}_z) = 0 \Rightarrow \frac{3\omega}{10c}(3E_y + 4E_z) = 0 \\ &\Rightarrow E_y = -\frac{4}{3}E_z \quad (\text{ecuación II}) \end{aligned}$$

De esta última ecuación se obtiene la relación entre las dos componentes, además se tiene que E_y tiene signo opuesto que E_z , pero de los datos del problema se tiene que la componente z alcanza su valor máximo en el origen y es positivo, es decir $E_z > 0$, por lo tanto combinando (II) con (I)

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \Rightarrow E = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}E_z\right)^2 + E_z^2} = \sqrt{\frac{16}{9}E_z^2 + E_z^2} = \sqrt{\frac{25}{9}E_z^2} \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{3}{5}E}$$

Por lo tanto $\boxed{E_y = -\frac{4}{5}E}$, por lo tanto el vector campo eléctrico en el origen en $t=0$ y que tiene el módulo máximo es

$$\vec{E}_{max} = \frac{3}{5}E\hat{u}_z - \frac{4}{5}E\hat{u}_y$$

Considerando el producto punto

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{3\omega}{10c}(3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \cdot (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z) \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{3\omega}{10c}(3y + 4z)$$

Así, el vector campo eléctrico como función del tiempo de la onda es

$$\boxed{\vec{E} = \frac{E}{5}(3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)}$$

Luego para hallar el campo magnético de la onda se tiene la relación

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{3\omega}{10c}(3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \right) \times \left(\frac{E}{5}(3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{(3\omega)E}{5(\omega)(10c)} [(3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \times (3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y)] \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)$$

Por separado hacemos el producto vectorial

$$(3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \times (3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 25\hat{u}_x$$

Entonces

$$\vec{B} = \frac{(3E)}{50c} 25\hat{u}_x \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{3E}{2c} \hat{u}_x \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)}$$

Luego, para el vector de Poyntig se tiene

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \left[\frac{E}{5} (3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right) \right] \times \left[\frac{3E}{2c} \hat{u}_x \cos\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{3E^2}{10\mu_0 c} [(3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) \times \hat{u}_x] \cos^2\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)$$

Por separado hacemos el producto vectorial

$$[(3\hat{u}_z - 4\hat{u}_y) \times \hat{u}_x] = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{u}_x(0 - 0) - \hat{u}_y(-3) + \hat{u}_z(-4) = 3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z$$

Así el vector de Poyntig será:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{3E^2}{10\mu_0 c} (3\hat{u}_y + 4\hat{u}_z) \cos^2\left(\frac{3\omega}{10c}(3y + 4z) - \omega t\right)}$$

Luego la tasa promedio del vector de Poyntig viene dado por

$$\langle S \rangle = \frac{|E_{max}^2|}{2\mu_0 c} \Rightarrow \boxed{\langle S \rangle = \frac{E^2}{2\mu_0 c}}$$

44. Una onda electromagnética polarizada linealmente, se desplaza en un medio de índice de refracción desconocido y tiene un campo eléctrico dado por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\frac{W}{c} (x - 2y + 2z - ct) + \frac{\pi}{3} \right]$$

donde W es conocida, c es la velocidad de la luz en el vacío y \vec{E}_0 (la amplitud vectorial de la onda eléctrica), es desconocida aunque se sabe que \vec{E}_0 se encuentra en el plano xy . Suponga que al instante $t = 0$ la componente x del campo eléctrico en el origen tiene un valor E conocido.

- Halle el vector número de onda, la longitud de la onda, la velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio.
- Determine los vectores campo eléctrico y magnético de la onda.
- Si la onda se sale del medio al vacío diga cuánto valen en el vacío su longitud de onda y su frecuencia.

Solución: Recordando la expresión general del campo eléctrico

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Se puede deducir al comparar la expresión general con la ecuación que nos da el problema que el vector número de onda es

$$\vec{k} = \frac{W}{c} (\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z)$$

Este vector número onda tendrá módulo $|\vec{k}| = \frac{W}{c} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \Rightarrow |\vec{k}| = \frac{3W}{c}$

Para la longitud de onda se tiene la relación $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$, así $\lambda = \frac{2\pi c}{3W}$

Luego recordando que la frecuencia es $f = \frac{W}{2\pi}$ y la velocidad en un medio viene dada por $|\vec{v}| = \frac{c}{\eta}$, donde η es el índice de refracción del medio. Tenemos que la longitud puede ser obtenida también por

$$\lambda = \frac{|\vec{v}|}{f} = \frac{2\pi c}{\eta W} \Rightarrow \frac{2\pi c}{3W} = \frac{2\pi c}{\eta W} \Rightarrow \eta = 3$$

Por lo tanto la velocidad de propagación de la onda será $\vec{v} = \frac{c}{\eta} \hat{d}$, donde el vector \hat{d} , es un vector unitario en la dirección de la propagación de la onda, es decir podemos obtenerlo mediante la normalización del vector \vec{k} , por lo tanto $\hat{d} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{1}{3}(\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z)$.

Entonces

$$\vec{v} = \frac{c}{\eta} \hat{d} \Rightarrow \vec{v} = \frac{c}{9} (\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z)$$

Luego, debemos buscar el vector campo eléctrico con los datos que nos ofrece el problema. Se sabe que el vector \vec{E}_0 está en el plano xy , por lo tanto tiene la forma

$\vec{E}_0 = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y$, además la componente x es conocida, es decir $\boxed{E_x = E}$, luego como esta información está relacionada al campo en el origen en $t = 0$, se tiene

$$\vec{E}(\vec{0}, 0) = \vec{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\vec{E}_0 = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y \Rightarrow \vec{E}_0 = 2(E \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y)$$

Luego como los vectores \vec{k} y \vec{E} son perpendiculares, se establece la relación

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \left[\frac{W}{c} (\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z) \right] \cdot [2(E \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y)] = 0 \Rightarrow 2E - 4E_y = 0 \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{E}{2}}$$

Por lo tanto

$$\vec{E}_0 = 2(E \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y) \Rightarrow \vec{E}_0 = 2E \hat{u}_x + E \hat{u}_y$$

Luego el vector campo eléctrico de la onda viene dado por

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = E(2\hat{u}_x + \hat{u}_y) \cos \left[\frac{W}{c} (x - 2y + 2z - ct) + \frac{\pi}{3} \right]}$$

Luego para hallar el campo magnético tenemos

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{W} = \frac{1}{W} \left[\frac{W}{c} (\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z) \right] \times \left[E(2\hat{u}_x + \hat{u}_y) \cos \left[\frac{W}{c} (x - 2y + 2z - ct) + \frac{\pi}{3} \right] \right]$$

$$\vec{B} = \frac{EW}{Wc} [(\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z) \times (2\hat{u}_x + \hat{u}_y)] \cos \left[\frac{W}{c} (x - 2y + 2z - ct) + \frac{\pi}{3} \right]$$

Por separado hacemos el producto vectorial

$$[(\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z) \times (2\hat{u}_x + \hat{u}_y)] = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{u}_x(0-2) - \hat{u}_y(0-4) + \hat{u}_z(1+4) = -2\hat{u}_x + 4\hat{u}_y + 5\hat{u}_z$$

Finalmente el vector campo magnético viene dado por

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E}{c} (-2\hat{u}_x + 4\hat{u}_y + 5\hat{u}_z) \cos \left[\frac{W}{c} (x - 2y + 2z - ct) + \frac{\pi}{3} \right]}$$

Por último si la onda sale del medio con $\eta = 3$ al vacío ($\eta = 1$) la longitud de onda será $\lambda_0 = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi c}{W}}$. La frecuencia de la onda no se ve alterada si sale de un medio al otro, ya que es una propiedad propia de la onda y no del medio donde se propaga.

45. Una onda electromagnética, polarizada linealmente y que se propaga en cierto medio, tiene un campo magnético dado por

$$\vec{B} = B_0 \hat{u}_y \cos \left[\frac{2\omega}{c}(4x - 3z) + \omega t \right]$$

Halle el vector número de onda \vec{k} , la longitud de onda, el índice de refracción del medio y la componente eléctrica de la onda.

Solución: Este es un ejercicio que no tiene gran dificultad en cuanto a las condiciones para buscar los elementos ya que de la ecuación del campo magnético conocemos el vector máximo \vec{B}_{max} , y conocemos la frecuencia angular ω , e implícitamente conocemos el vector número de onda \vec{k} , el cual tiene un pequeño detalle.

Recordemos la expresión general del campo magnético

$$\vec{B} = \vec{B}_{max} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Observemos que la diferencia del vector dado en el problema con la expresión general, es que el término ωt originalmente está acompañado de un negativo y esto se debe a que la función coseno permite escribir la expresión original de otra manera, si extraemos factor común (-1) en el coseno se tiene

$$\vec{B} = \vec{B}_{max} \cos[-(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)] \Rightarrow \vec{B} = -\vec{B}_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Ya que tenemos dos formas de escribir el campo, observemos que en la última que si definimos el vector \vec{k} como el obtenido al sacar el producto punto sin considerar una anteposición de un signo negativo, es decir $\vec{k} = \frac{2\omega}{c}(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z)$, debemos considerar que el campo máximo \vec{B}_{max} expresado en la ecuación es en realidad el opuesto al original, es decir $\vec{B} = -B_0 \hat{u}_y$

Pero por otro lado si definimos el vector máximo como está explícitamente, tomaremos el vector número de onda con un signo negativo antepuesto, es decir $\vec{k} = -\frac{2\omega}{c}(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z)$, y éste sera la manera de definirlo para nuestro problema, para evitar tener problemas con la búsqueda del campo eléctrico. Entonces

$$\vec{k} = -\frac{2\omega}{c}(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z)$$

El cual tiene módulo $|\vec{k}| = \frac{2\omega}{c} \sqrt{4^2 + 3^2} = \frac{10\omega}{c}$, por lo tanto la longitud de onda se obtiene mediante la relación $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi c}{10\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi c}{5\omega}$

Y recordando que la longitud también es obtenida mediante

$$\lambda = \frac{|\vec{v}|}{f} = \frac{c(2\pi)}{\eta\omega} = \frac{\pi c}{5\omega} \Rightarrow \frac{2}{\eta} = \frac{1}{5} \Rightarrow \eta = 10$$

Luego, para hallar el campo eléctrico se tiene la relación:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{k} \cdot \vec{B}}{\omega} v^2 = -\frac{c^2}{\eta^2 \omega} \left[\frac{2\omega}{c}(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z) \right] \times \left[B_0 \hat{u}_y \cos \left[\frac{2\omega}{c}(4x - 3z) + \omega t \right] \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{2c}{\eta^2} B_0 [(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z) \times (\hat{u}_y)] \cos \left[\frac{2\omega}{c} (4x - 3z) + \omega t \right]$$

Por separado hacemos el producto vectorial

$$[(4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z) \times (\hat{u}_y)] = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{u}_x(0 + 3) - \hat{u}_y(0 - 0) + \hat{u}_z(4 - 0) = 3\hat{u}_x + 4\hat{u}_z$$

Finalmente el vector campo magnético viene dado por

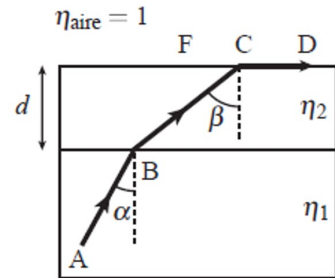
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2c}{\eta^2} B_0 (3\hat{u}_x + 4\hat{u}_z) \cos \left[\frac{2\omega}{c} (4x - 3z) + \omega t \right]}$$

con $\eta = 10$

0.8. Óptica

Nota: En esta revisión sólo se encuentran los problemas de la guía que corresponden a óptica geométrica que se resuelven usando Ley de Snell. No se resuelven los problemas de espejos.

47. La figura muestra dos cristales superpuestos, de índices de refracción desconocidos η_1 y η_2 , inmersos en aire. El cristal 2 es una lámina plana de espesor d . El rayo AB se refracta según BCD donde los ángulos α y β ($\beta > \alpha$) son conocidos y el rayo CD sale al aire rasante a la superficie del cristal 2. El punto F es la intersección de la prolongación del rayo AB y la interface aire-cristal 2.



a. Halle η_1 y η_2 .

b. Calcule la separación entre los puntos F y C.

c. Explique qué ocurre con el rayo CD si:

c1. Aumenta ligeramente el ángulo α .

c2. Disminuye ligeramente el ángulo α .

c3. Se cambia el cristal 2 por otro de la misma forma pero con distinto índice de refracción.

Solución: Tenemos que para el rayo que se refracta del cristal 2 al aire y pasa rasante, el ángulo con el aire, será de $\pi/2$. Por lo tanto la Ley de Snell para este rayo es

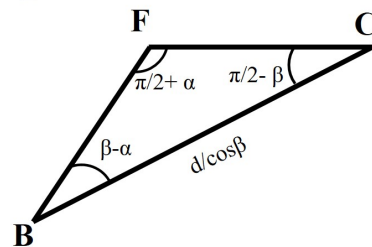
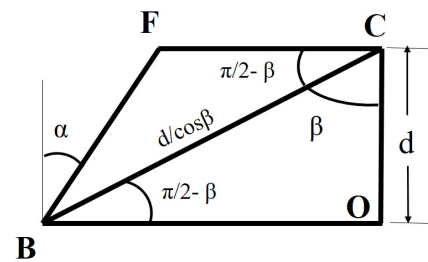
$$\eta_{\text{aire}} \sin(\gamma) = \eta_2 \sin \beta \Rightarrow 1 = \eta_2 \sin \beta \Rightarrow \boxed{\eta_2 = \frac{1}{\sin \beta}}$$

Luego para la incidencia del rayo AB en el cristal 1 y la refracción en el cristal 2 se tiene

$$\eta_1 \sin \alpha = \eta_2 \sin \beta \Rightarrow \eta_1 \sin \alpha = \frac{1}{\sin \beta} \sin \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = \frac{1}{\sin \alpha}}$$

Para determinar la distancia entre los puntos F y C debemos utilizar las relaciones trigonométricas que se encuentran al formar triángulos de forma conveniente. Unimos mediante segmentos los puntos \overline{BF} , \overline{FC} , \overline{CB} y trazamos una vertical que pasa por C. Con ello hemos obtenido los triángulos BCO y BFC.



Para el triángulo BCO, se conoce el ángulo β y el lado BO , usando la relación trigonométrica del coseno, obtenemos que $\cos \beta = \frac{d}{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{d}{\cos \beta}$. Además el ángulo desconocido puede ser obtenido mediante la suma de ángulos internos $\pi = \pi/2 + \beta + \theta \Rightarrow \theta = \pi/2 - \beta$.

Luego veamos las relaciones en el triángulo BFC, para el ángulo α tenemos la relación de ángulos opuestos, además del ángulo θ calculado anteriormente, con esto se obtiene que

el ángulo $\angle CBF$ es $\beta - \alpha$, y finalmente con la suma de ángulo internos el ángulo restante es $\beta + \alpha$.

Con la construcción de este triángulo se tiene el lado \overline{FC} que es la distancia que queremos hallar, como BFC no es rectángulo usamos ley de senos

$$\frac{d}{\cos \beta \sin(\pi/2 + \alpha)} = \frac{\overline{FC}}{\sin(\beta - \alpha)} \Rightarrow \overline{FC} = \frac{d \sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta \sin(\pi/2 + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} = \frac{d(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)}{\cos \beta (\sin(\pi/2) \cos \alpha + \cos(\pi/2) \sin \alpha)} = \frac{d(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)}{\cos \beta \cos \alpha}$$

$$\boxed{\overline{FC} = d(\tan \beta - \tan \alpha)}$$

Rayo CD: Veamos que ocurre con este rayo bajo las situaciones planteadas. Para ello primero establecemos las relaciones de la Ley de Snell

$$\eta_1 \sin \alpha = \eta_2 \sin \beta \quad \eta_2 \sin \beta = \sin \gamma$$

De donde se obtiene que $\eta_1 \sin \alpha = \sin \gamma$ donde γ es el ángulo que forma el rayo CD al salir el aire. Veamos que si

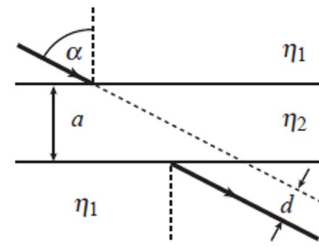
Aumenta ligeramente α , el valor del seno se incrementa por lo tanto por la proporcionalidad establecida por la relación $\eta_1 \sin \alpha = \sin \gamma$ tienda a incrementar el $\sin \gamma$, lo cual si se quiere que el rayo CD pase rasante no sería posible ya que el seno no puede ser más grande que 1, por lo tanto no sería posible la refracción en el aire si se aumenta el valor de α .

Disminuye ligeramente α , el valor del seno disminuye por lo tanto por la proporcionalidad establecida por la relación $\eta_1 \sin \alpha = \sin \gamma$, el valor de γ disminuye y como γ es el ángulo que forma la vertical con el rayo, el rayo sale del cristal 2 con una inclinación γ , por lo que se refracta hacia afuera, pero no rasante.

Si se cambia η_2 , debemos comparar con otra relación para ello usamos $\eta_2 \sin \beta = \sin \gamma$. Si η_2 es un poco mayor, no sería posible la refracción y si es ligeramente menor η_2 sucede lo mismo que cuando se disminuye α , se refracta con una inclinación menor a 90 grados.

48. La figura muestra un medio de índice de refracción η_2 , limitado por caras planas paralelas, de espesor a , inmerso en otro medio de índice η_1 , ($\eta_1 < \eta_2$).

Demuestre que para un rayo que atraviesa el medio 2, la dirección de propagación del rayo emergente es paralela a la del rayo incidente. Calcule el desplazamiento lateral d de los rayos para un ángulo de incidencia α . Demuestre que para α pequeño se cumple que $d \approx \frac{a\alpha(\eta_2 - \eta_1)}{\eta_2}$



Solución: Supongamos que el rayo se refracta en el medio 2 con ángulo β y cuando sale de nuevo al medio 1 con un ángulo θ . Por la Ley de Snell se deben satisfacer las relaciones

$$\eta_1 \sin \alpha = \eta_2 \sin \beta \quad \eta_2 \sin \beta = \eta_1 \sin \theta$$

Si combinamos ambas ecuaciones se obtiene la igualdad

$$\eta_1 \sin \alpha = \eta_1 \sin \theta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \theta \Rightarrow \boxed{\theta = \alpha}$$

Por lo tanto concluimos que el rayo entra y sale con la misma inclinación.

Ahora buscaremos la distancia de separación entre los rayos paralelos, para ello construimos los triángulos ACB y OCB con los que usando relaciones trigonométricas encontraremos d .

Con el primer triángulo ACB son conocidos el lado \overline{AC} y el ángulo β con esto es posible obtener la hipotenusa del mismo $\cos \beta = \frac{a}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{a}{\cos \beta}$

Luego tenemos el triángulo OCB que también es rectángulo y donde conocemos el lado \overline{BC} y el ángulo faltante se obtiene mediante la relación del ángulo opuesto de α y la resta con el ángulo β , obteniendo que el ángulo restante $\beta - \alpha$. Para este triángulo usamos la relación del seno

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{\overline{BC}} \Rightarrow d = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

Pero de la relación de la Ley de Snell, se obtiene que $\sin \beta = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha$.

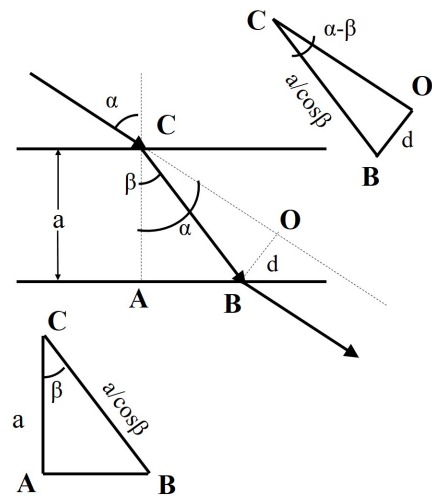
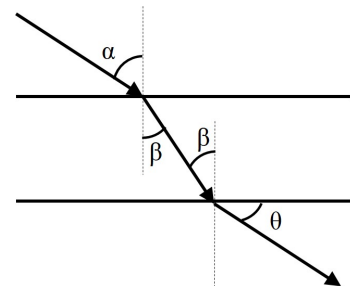
Entonces

$$d = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \frac{a(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\cos \beta} = a \left(\sin \alpha - \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta} \right)$$

$$\Rightarrow d = a \left(\sin \alpha - \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \right) = a \sin \alpha \left(1 - \frac{\eta_1 \cos \alpha}{\eta_2 \sin \beta} \right)$$

con

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha \right)^2}$$



Ahora trabajemos con la aproximación de un ángulo α pequeño lo cual permite establecer que $\sin \alpha \approx \alpha$ y como esto ocurre $\cos \alpha \approx 1$, a la vez como se cumple por la Ley de Snell la proporcionalidad entre los ángulos, al considerar α pequeño, también aproximadamente lo será β , es decir $\sin \beta \approx \beta$ y $\cos \beta \approx 1$

Por lo tanto para la distancia tenemos

$$d = a \sin \alpha \left(1 - \frac{\eta_1 \cos \alpha}{\eta_2 \sin \beta} \right) \approx a \alpha \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) = a \alpha \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2} \right) \Rightarrow d \approx \frac{a \alpha (\eta_2 - \eta_1)}{\eta_2}$$

49. Un rayo de luz llega a una placa cuadrada de cristal, como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser el índice de refracción del cristal para que ocurra reflexión total interna en la cara vertical?

Solución: Suponemos que el rayo al incidir sobre la placa de cristal se refracta con un ángulo β , que se relaciona con la Ley de Snell

$$\eta \sin \beta = (1) \sin \theta \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \theta}{\eta}$$

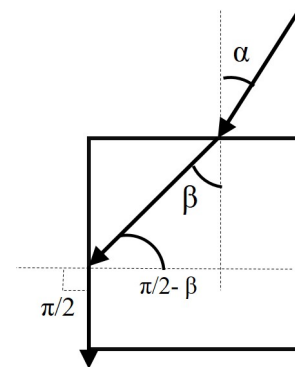
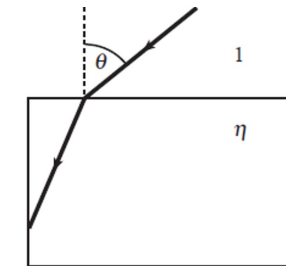
Luego al incidir de nuevo al cristal se quiere que ocurra refracción total interna para ello se debe cumplir que el ángulo con la vertical (perpendicular a la tangente a la superficie de incidencia) sea de $\pi/2$. Por lo tanto usando Ley de Snell tenemos

$$\eta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = (1) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta \cos \beta = 1$$

Pero $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, entonces

$$\eta \cos \beta = 1 \Rightarrow \eta \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 1 \Rightarrow \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\eta}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \eta \sqrt{\frac{\eta^2 - \sin^2 \theta}{\eta^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\eta^2 - \sin^2 \theta} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}}$$



Tipeado en L^AT_EX

FIN.